3　シンプレックス法の収束性と初期化

第 2 章では，シンプレックス法の基本的な仕組みを紹介し，実行可能辞書をもつ基準形 LP に対して

- 現在の実行可能基底解が最適解であると認識される，あるいは
- 入力 LP の非有界性が判定される

まで，その辞書を繰り返し更新する方法であることがわかりました．しかし，まだ技術的に重要な 2 つの疑問：

(a)　収束性 — シンプレックス法はいつでも有限回で終了するのか？

(b)　初期化 — 任意の LP の実行可能辞書をどうやって求めるのか？

が残っています．この章で，これらの解決策を示します．具体的には，(a) に関して有限回で終了しない LP の例を挙げ，そのような現象 (巡回) を防ぐ方法として Bland のピボット選択規則を紹介します．次に (b) に関し，与えられた LP に新たな変数を加えて自明な実行可能辞書をもつ LP を定義し，これを解くことでもとの問題の実行可能辞書が (存在すれば) 求められることを示します．最後に，以上 2 つの結果から第 1 章の基本定理を導きます．

3.1　ピボット選択規則と巡回

シンプレックス法が有限回で終了しない巡回現象をみる前に，ピボット列の選択規則について説明しておきましょう．

前章の algorithm シンプレックス法，ステップ 2 では，

　　$c_s > 0$ となる添字 s $(1 \leq s \leq n)$ を 1 つ選ぶ;

とのみあり，$c_s > 0$ の s が複数ある場合のピボット列の選択方法が示されていません．シンプレックス法では，このピボット列の選択に多くの自由度があります．よく用いられるのは Dantzig が提案した**最大係数規則** (largest coefficient rule) です．

最大係数規則:

- ピボット列を選ぶとき，$c_s > 0$ を満たす列 s が複数あれば，その中で係数 c_s の最も大きいものを選ぶ.

この規則は，対応する非基底変数 $x_{N(s)}$ の値が 1 単位増加したとき，目的関数 z の値が最も大きくなるようにピボット列を選択します．したがって，近視眼的な選択規則といえます．

しかし，実際には，最大係数規則で目的関数の増加が最大になるとはかぎりません．次の**最大改善規則** (largest improvement rule) では，1 回のピボットで得られる目的関数値の増加を最大にすることができます.

最大改善規則:

- ピボット列を選ぶとき，$c_s > 0$ を満たす列 s が複数あれば

$$v_s = \min\{b_i \;/\; a_{ij} \mid a_{ij} > 0,\;\; 1 \le i \le m\}$$

 として $c_s \times v_s$ の最も大きなものを選ぶ.

どちらの選択規則が優れているかの議論は後にまわして，ここでは最大係数規則を使って次の基準形 LP を解いてみましょう:

例 3.1.

$$\left|\begin{array}{lrcrcrcrcl} \text{最大化} & 10x_1 & - & 57x_2 & - & 9x_3 & - & 24x_4 & & \\ \text{条　件} & 0.5x_1 & - & 5.5x_2 & - & 2.5x_3 & + & 9x_4 & \le & 0 \\ & 0.5x_1 & - & 1.5x_2 & - & 0.5x_3 & + & x_4 & \le & 0 \\ & x_1 & & & & & & & \le & 1 \\ & & & & & x_1, & x_2, & x_3, \; x_4 & \ge & 0. \end{array}\right. \tag{3.1}$$

制約条件の右辺 b_i はすべて非負の定数であり，スラック変数 x_5, x_6, x_7 (≥ 0) と目的関数値

を表す変数 z を導入すれば，直ちに実行可能な辞書

$$\left|\begin{array}{lcllllllll} x_5 & = & 0 & - & 0.5x_1 & + & 5.5x_2 & + & 2.5x_3 & - & 9x_4 \\ x_6 & = & 0 & - & 0.5x_1 & + & 1.5x_2 & + & 0.5x_2 & - & x_4 \\ x_7 & = & 1 & - & x_1 & & & & & & \\ z & = & 0 & + & 10x_1 & - & 57x_2 & - & 9x_3 & - & 24x_4 \end{array}\right. \tag{3.2}$$

が得られ，シンプレックス法を始めることができます．シンプレックス法のステップ 2 では，z 行の変数 x_1 の係数のみが正であることから第 1 列をピボット列 s として選びます．次のステップ 3 ですが，

$$b_1 \,/\, a_{11} = b_2 \,/\, a_{21} = 0 < b_3 \,/ a_{31} = 1$$

が成り立ち，ピボット行 r としては $b_1 = b_2 = 0$ の第 1 行か第 2 行が選ばれることになります．ここでは，ピボット列選択の最大係数規則に加え，

- ピボット行を選ぶとき，$b_r \,/\, a_{rs} = \min\{b_i \,/\, a_{is} \mid a_{is} > 0,\ \ i = 1,\ \ldots,\ m\}$ を満たす行 r が複数あれば添字 $B(r)$ の最も小さいものを選ぶ

こととし，以後このピボット行選択規則を適用することにします．したがって，第 1 行をピボット行に選び，$(r,\ s) = (1,\ 1)$ を中心ととするピボット演算を行います:

$$\left|\begin{array}{lcllllllll} x_1 & = & 0 & - & 2x_5 & + & 11x_2 & + & 5x_3 & - & 18x_4 \\ x_6 & = & 0 & + & x_5 & - & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 8x_4 \\ x_7 & = & 1 & + & 2x_5 & - & 11x_2 & - & 5x_3 & + & 18x_4 \\ z & = & 0 & - & 20x_5 & + & 53x_2 & + & 41x_3 & - & 204x_4 \end{array}\right. \tag{3.3}$$

基底変数の集合は $\{x_5,\ x_6,\ x_7,\ z\}$ から $\{x_1,\ x_6,\ x_7,\ z\}$ に替わりましたが，基底解は

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ z) = (0,\ 0,\ 0,\ ,0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)$$

から全く変化していません．

この例のように右辺の定数 b_i がゼロの行で行うピボット演算を**退化している** (degenerate) といいます．簡単に証明できますが，

- ピボット演算が退化している必要十分条件は，基底解が変化しない　(宿題 3.1)

ことです．また，右辺に値ゼロの定数 b_i が**少なくとも 1 つ**含まれるとき，その辞書は**退化している** (degenerate) といいます．したがって，(3.2), (3.3) はともに退化した辞書です．

さて，もしもシンプレックス法が有限回で終了しないとすれば，それはどのような状況でしょうか．一般に，

- 同じ基底変数の集合をもつ辞書は一意に定まる　(宿題 3.2)

- シンプレックス法でピボット演算が退化していなければ，目的関数値は必ず増加する

ことを考えあわせると，シンプレックス法が収束しないためには，何回かのピボット演算ののちに再び同じ辞書が現れ，その中で行われたピボット演算はすべて退化していなければなりません．そして，この**巡回** (cycling) とよばれる現象は，最大係数規則に限らず，最大改善規則でも起こりうることが知られています．

例 3.1 の問題 (3.1) は，最大係数規則で巡回が起きるように作られた問題例で，1983 年の Chvátal の教科書に掲載されたものです．実際，辞書 (3.3) にピボット演算を続けると

$$
\left|\begin{array}{lclllll}
x_1 & = & 0 & +0.75x_5 & -2.75x_6 & -0.5x_3 & +4x_4 \\
x_2 & = & 0 & +0.25x_5 & -0.25x_6 & -0.5x_3 & +2x_4 \\
x_7 & = & 1 & -0.75x_5 & +2.75x_6 & +0.5x_3 & -4x_4 \\
z & = & 0 & -6.75x_5 & -13.25x_6 & +14.5x_3 & -98x_4
\end{array}\right.
\to
\left|\begin{array}{lclllll}
x_3 & = & 0 & +1.5x_5 & -5.5x_6 & -2x_1 & +8x_4 \\
x_2 & = & 0 & -0.5x_5 & +2.5x_6 & +x_1 & -2x_4 \\
x_7 & = & 1 & & & -x_1 & \\
z & = & 0 & +15x_5 & -93x_6 & -29x_1 & +18x_4
\end{array}\right.
$$

$$
\to
\left|\begin{array}{lclllll}
x_3 & = & 0 & -0.5x_5 & +4.5x_6 & +2x_1 & -4x_2 \\
x_4 & = & 0 & -0.25x_5 & +1.25x_6 & +0.5x_1 & -0.5x_2 \\
x_7 & = & 1 & & & -x_1 & \\
z & = & 0 & +10.5x_5 & -70.5x_6 & -20x_1 & -9x_2
\end{array}\right.
$$

となり，次に得られる辞書

$$
\left|\begin{array}{lclclclclcl}
x_5 & = & 0 & - & 2x_3 & + & 9x_6 & + & 4x_1 & - & 8x_2 \\
x_4 & = & 0 & + & 0.5x_3 & - & x_6 & - & 0.5x_1 & + & 1.5x_2 \\
x_7 & = & 1 & & & & & - & x_1 & & \\
z & = & 0 & - & 21x_3 & + & 24x_6 & + & 22x_1 & - & 93x_2
\end{array}\right.
\tag{3.4}
$$

で，$(r,\ s) = (2,\ 2)$ を中心とするピボット演算を行えば最初の辞書 (3.2) に戻ります．

3.2 有限収束の保証

Algorithm シンプレックス法は，最大係数規則や最大改善規則を用いるかぎり，巡回の起きる可能性があるために有限収束が保証されません．しかし，別のピボット選択規則のもとでは常に収束することが知られています．そのようなピボット選択規則はいくつかありますが，最もシンプルでエレガントな**最小添字規則** (smallest subscript rule) を紹介しましょう．

最小添字規則:

- ピボット列を選ぶとき，$c_s > 0$ を満たす列が複数あれば添字 $N(x)$ の最も小さいものを選ぶ．
- ピボット行を選ぶとき，$b_r \,/\, a_{rs} = \min\{b_i \,/\, a_{is} \mid a_{is} > 0,\ \ i = 1,\ \ldots,\ m\}$ を満たす行 r が複数あれば添字 $B(r)$ の最も小さいものを選ぶ

この選択規則に対して次の定理が成り立ちます:

定理 3.1. [Bland, 1977]
最小添字規則を用いれば，シンプレックス法は必ず有限回で終了する．

定理 3.1 の証明は付録に譲ることにして，巡回を起こした問題 (3.1) に最小添字規則を適用してみましょう．この問題例では，辞書 (3.4) までは最大係数規則と同じピボットが選択されますが，辞書 (3.4) では z 行で正の係数をもつ 2 つの非基底変数 $x_6,\ x_1$ のうち，添字の小さい x_1 の列がピボット列 $r = 3$ として選ばれます．ピボット行は，この場合，一意に x_4 の行 $s = 2$ に定まるので，$(r,\ s) = (3,\ 2)$ を中心とするピボット演算を行うと

$$
\left|
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_5 & = & 0 & + & 2x_3 & + & x_6 & - & 8x_4 & + & 4x_2 \\
x_1 & = & 0 & + & x_3 & - & 2x_6 & - & 2x_4 & + & 3x_2 \\
x_7 & = & 1 & - & x_3 & + & 2x_6 & + & 2x_4 & - & 3x_2 \\
z & = & 0 & + & x_3 & - & 20x_6 & - & 44x_4 & - & 27x_2
\end{array}
\right.
$$

次のピボットの中心は $(r,\ s)=(3,\ 1)$ に一意に定まり，

$$
\left|
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_5 & = & 2 & - & 2x_7 & + & 5x_6 & - & 4x_4 & - & 2x_2 \\
x_1 & = & 1 & - & x_7 & & & & & & \\
x_3 & = & 1 & - & x_7 & + & 2x_6 & + & 2x_4 & - & 3x_2 \\
z & = & 1 & - & x_7 & - & 18x_6 & - & 42x_4 & - & 30x_2
\end{array}
\right.
$$

となって，退化から脱出すると同時に最適性の条件も満たされます．ピボットの中心は，あくまで <u>変数の添字の大小で選択され，行番号・列番号の大小には無関係</u> ですから間違えないように注意してください．

宿題

3.1 ピボット演算が退化している必要十分条件は，基底解が変化しないことを示せ．

3.2 基底変数，非基底変数の集合が等しい 2 つの辞書は，同一の辞書であることを証明せよ．

[ヒント: 2 つの辞書が等価な線形等式系 (つまり，同じ解集合をもつ) ことを使って両者の各係数が等しいことを示す．]

3.3 次の問題 (Beale, 1955) に，最大係数規則，最大改善規則，最小添字規則のそれぞれを用いたシンプレックス法を適用せよ:

$$
\left|
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{最大化} & 3/4x_1 & - & 150x_2 & + & 1/50x_3 & - & 6x_4 & & \\
\text{条　件} & 1/4x_1 & - & 60x_2 & - & 1/25x_3 & + & 9x_4 & \leq & 0 \\
 & 1/2x_1 & - & 90x_2 & - & 1/50x_3 & + & 3x_4 & \leq & 0 \\
 & & & & & x_3 & & & \leq & 1 \\
 & & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4} & \leq & 0.
\end{array}
\right.
$$

3.3 初期化と 2 段階シンプレックス法

すでに触れましたが，任意の基準形 LP の実行可能解を求めることもシンプレックス法で実現できます．次の例題の実行可能辞書を求めてみましょう:

例 3.2.

$$
\left|\begin{array}{llcrcrcrcr}
\text{最大化} & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & & \\
\text{条　件} & 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \leq & -4 \\
& & - & 2x_2 & - & 2x_3 & \leq & -3 \\
& 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & -2 \\
& & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0.
\end{array}\right. \tag{3.5}
$$

前処理　問題 (3.5) の最初の辞書は，

$$
\left|\begin{array}{lcrcrcrcr}
x_4 & = & -4 & - & 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 \\
x_5 & = & -3 & & & + & 2x_2 & + & 2x_3 \\
x_6 & = & -2 & - & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 \\
z & = & 0 & + & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3
\end{array}\right.
$$

となって実行可能になりません．このような場合は，新たに**人工変数** (artificial variable) x_0 を導入し，**補助問題** (auxiliary problem):

$$
\left|\begin{array}{llcrcrcrcrcr}
\text{最大化} & & & & - & x_0 & & & & & & \\
\text{条　件} & x_4 & = & -4 & + & x_0 & - & 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 \\
& x_5 & = & -3 & + & x_0 & & & + & 2x_2 & + & 2x_3 \\
& x_6 & = & -2 & + & x_0 & - & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 \\
& & & & & & & \multicolumn{5}{r}{x_1,\ \ldots,\ x_6 \ \geq\ 0,\ \ x_0\ \geq\ 0}
\end{array}\right. \tag{3.6}
$$

を定義します．このとき，

- 問題 (3.5) が実行可能 $\Longleftrightarrow$ 問題 (3.6) の最適な目的関数値がゼロ

を示すことができます (宿題 3.4)．つまり，(3.6) を解くことで (3.5) の実行可能性が判定できます．さらに，(3.5) が実行可能であれば，その実行可能解を求めることもできます．

補助問題 (3.5) を解くために，まず辞書を作ります:

$$\begin{array}{|ccccccccccccc}
& x_4 & = & -4 & + & x_0 & - & 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \\
& x_5 & = & -3 & + & x_0 & & & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \\
& x_6 & = & -2 & + & x_0 & - & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \\
(& z & = & 0 & & & + & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 &) \\
& w & = & 0 & - & x_0 & & & & & & & .
\end{array}$$

ここで最大化する目的関数は $w = -x_0$ であり，カッコ内の変数 z はもとの問題の目的関数値を参照しているだけです．この辞書はまだ実行可能ではありませんが，人工変数 x_0 の列でピボット演算を行うことにより，常に実行可能な辞書に書き換えることができます．それには，他の非基底変数の値をゼロに固定したまま，x_0 の値だけを基底変数の値がどれも非負になるまで増加させます．そして，最後に非負となった基底変数と人工変数 x_0 を入れ替えるピボット演算を行います．この例では，x_0 と x_4 を入れ替えることによって実行可能な辞書

$$\begin{array}{|ccccccccccccc}
& x_0 & = & 4 & + & x_4 & + & 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \\
& x_5 & = & 1 & + & x_4 & + & 2x_1 & & & + & 3x_3 & \\
& x_6 & = & 2 & + & x_4 & + & & - & x_2 & & & \\
(& z & = & 0 & & & + & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 &) \\
& w & = & -4 & - & x_4 & - & 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 &
\end{array} \tag{3.7}$$

が得られ，これを algorithm シンプレックス法の入力にすることができます．

初期化　補助問題の目的関数には

$$w = -x_0 \leq 0$$

という明らかな上界が存在します．したがって，前処理で得られた実行可能辞書をシンプレックス法に入力すると，非有界となって終了することはなく，必ず最適辞書が出力されます．実

際，(3.7) で $(r,\ s) = (1,\ 3)$ を中心にピボット演算を行えば，

$$
\left|\begin{array}{ccccccccccccc}
 & x_2 & = & 2 & + & 1/2x_4 & + & x_1 & - & 1/2x_0 & + & 1/2x_3 & \\
 & x_5 & = & 1 & + & x_4 & + & 2x_1 & & & + & 3x_3 & \\
 & x_6 & = & 0 & + & 1/2x_4 & - & x_1 & + & 1/2x_0 & - & 1/2x_3 & \\
(& z & = & 2 & + & 1/2x_4 & + & 2x_1 & - & 1/2x_0 & - & 3/2x_3 &) \\
 & w & = & 0 & & & & & - & x_0 & & &
\end{array}\right.
$$

が得られて最適性を満たします．この場合，最適値がゼロなので，もとの問題 (3.5) は実行可能であることがわかります．非基底変数になった人工変数 x_0 の値を恒等的にゼロとおき，w の等式を無視することで (3.5) の実行可能辞書:

$$
\left|\begin{array}{ccccccccc}
x_2 & = & 2 & + & 1/2x_4 & + & x_1 & + & 1/2x_3 \\
x_5 & = & 1 & + & x_4 & + & 2x_1 & + & 3x_3 \\
x_6 & = & 0 & + & 1/2x_4 & - & x_1 & - & 1/2x_3 \\
z & = & 2 & + & 1/2x_4 & + & 2x_1 & - & 3/2x_3
\end{array}\right.
$$

が得られます．これを入力に algorithm シンプレックス法を再び実行すれば，もとの問題 (3.5) の最適解が求まるか，あるいは非有界であることが判明します．

もしも補助問題の最適辞書で人工変数 x_0 が基底変数として残り，最適値がゼロにならなければ，もとの問題は実行不可能で最適解もありません．

注意　それでは，補助問題の最適辞書で「人工変数 x_0 が基底変数に残っているのに目的関数値はゼロとなる」場合，どのように処理すればよいのでしょうか．

例えば，

$$
\left|\begin{array}{lcccccc}
\text{最大化} & & x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{条　件} & & x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & - & x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\
 & & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0
\end{array}\right.
\tag{3.8}
$$

に対して補助問題を解くと，...

$$
\left|
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
 & x_3 & = & 1 & + & x_0 & - & x_1 & - & x_2 \\
 & x_4 & = & -1 & + & x_0 & + & x_1 & + & x_2 \\
(& z & = & 0 & & & + & x_1 & + & 2x_2 \quad) \\
 & w & = & 0 & - & x_0 & & & &
\end{array}
\right.
$$

$$
\to \left|
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
 & x_3 & = & 2 & + & x_4 & - & 2x_1 & - & 2x_2 \\
 & x_0 & = & 1 & + & x_4 & - & x_1 & - & x_2 \\
(& z & = & 0 & & & + & x_1 & + & 2x_2 \quad) \\
 & w & = & -1 & - & x_4 & + & x_1 & + & x_2
\end{array}
\right. \tag{3.9}
$$

$$
\to \left|
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
 & x_1 & = & 1 & + & 1/2x_4 & - & 1/2x_3 & - & x_2 \\
 & x_0 & = & 0 & + & 1/2x_4 & + & 1/2x_3 & & \\
(& z & = & 1 & + & 1/2x_4 & - & 1/2x_3 & + & x_2 \quad) \\
 & w & = & 0 & - & 1/2x_4 & - & 1/2x_3 & &
\end{array}
\right.
$$

ここで最適性の条件が満たされて補助問題は解けたわけですが，人工変数 x_0 が基底変数のままです． ...実は，最小添字規則を用いる限り，このようなケースは起こりえません．

補助問題の目的関数は $w = -x_0$ ですから,「人工変数 x_0 が基底変数に残っているのに目的関数値はゼロとなる」ときには最適辞書が退化しています．その原因は，直前の辞書でピボット行の候補が x_0 の行も含めて複数あり，実際にピボット演算を行ったのが x_0 以外の行であったためです．上の例では，(3.9) で x_3 の第 1 行と x_0 の第 2 行がピボット行の候補であり，最小添字規則に反して第 1 行でピボット演算を行っています．人工変数 x_0 の添字は「0」ですから，最小添字規則さえ守れば

$$
\left|
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
 & x_3 & = & 0 & - & x_4 & + & 2x_0 & & \\
 & x_1 & = & 1 & + & x_4 & - & x_0 & - & x_2 \\
(& z & = & 1 & + & x_4 & - & x_0 & + & x_2 \quad) \\
 & w & = & 0 & & & - & x_0 & &
\end{array}
\right.
$$

となって，目的関数値ゼロの最適辞書で人工変数は非基底変数になります．

以上をまとめると，任意の基準形 LP に対する実行可能辞書の求め方は次のようになります:

procedure 初期化 (基準形 LP)

begin
  スラック変数を導入して LP の辞書 D を作る;
  if 辞書 D が実行不可能 then
  begin
    人工変数 x_0 を辞書 D に導入し，$w = -x_0$ を最大化する補助問題を作る;
    補助問題の辞書 D' を作り，algorithm シンプレックス法に入力する;
        { ただし，もとの目的関数の等式も D' に加え，これにもピボット演算を施す }
    if 補助問題の最適目的関数値がゼロ then
      辞書 D' で $x_0 := 0$ とし，w の等式を削除して得られる辞書を改めて D とする
    end
  end
end;

この procedure 初期化と 2 章の algorothm シンプレックス法を組み合わせて LP を解く方法を **2 段階シンプレックス法** (two-phase simplex method) とよびます:

algorithm 2 段階シンプレックス法

入力: 任意の基準形 LP

begin { 第 1 段階 }
  procedure 初期化 (LP) を呼んで LP の辞書 D を求める;
  if 辞書 D が実行不可能 then 終了 { 入力 LP は実行不可能 }
  else
    辞書 D を入力として algorithm シンプレックス法を実行する { 第 2 段階 }
  end
end;

第１，第２段階ともに２章の algorithm シンプレックス法が主な役割を担いますが，そのピボット選択に最小添字規則を用いることで，algorithm ２段階シンプレックス法も有限回での収束が保証されます.

3.4 基本定理の証明

第１章であげた LP の基本定理 — 定理 1.1 の主張は,

- 実行可能で有界な LP は最適解をもつ

でした．２段階シンプレックス法を使って，これを証明しましょう:

証明: まず，任意に実行可能で有界な LP 問題 P を選ぶ．第２章で説明したように LP は同値な基準形の問題に書き換えられるので，一般性を失うことなく，この問題 P も基準形であると仮定できる．問題 P の実行可能性から，２段階シンプレックス法の第１段階で algorithm シンプレックス法を最小添字規則とともに用いることで実行可能辞書 D が得られる．さらに，P の有界性から，第２段階で D に algorithm シンプレックス法を再び最小添字規則とともに適用すれば P の最適解が得られる. □

宿題

3.4 LP が実行可能であることと，その補助問題の最適目的関数値がゼロであることが同値なことを示せ.

3.5 次の LP を２段階シンプレックス法で解け:

(a)
$$\begin{array}{|lrrrrrrl} \text{最大化} & & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{条　件} & - & 2x_1 & + & x_2 & \le & 1 \\ & & x_1 & - & 2x_2 & \le & -4 \\ & & x_1 & + & x_2 & \le & 2 \\ & & & & x_1,\ x_2 & \ge & 0 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{|lrrrrrrl} \text{最大化} & & 3x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{条　件} & - & 2x_1 & + & x_2 & \le & 1 \\ & & x_1 & - & 2x_2 & \le & 0 \\ & - & x_1 & - & x_2 & \le & -2 \\ & & & & x_1,\ x_2 & \ge & 0 \end{array}$$

4 線形計画問題の双対性

シンプレックス法を用いた線形計画問題の解き方を一通り理解したところで，次は問題の最適性に関わる理論的な話に移りましょう．これから説明する**双対性** (duality) は最適化理論の中核であるだけでなく，実際の応用にも役立つきわめて重要な LP の性質です．

4.1 双対問題

次の基準形 LP について考えましょう:

例 4.1.

$$
\begin{array}{lrcrcl}
 & \text{最大化} \quad 15x_1 & + & 20x_2 & & \\
 & \text{条　件} & & & & \\
(\mathrm{E}_1): & 4x_1 & + & 6x_2 & \leq & 240 \\
(\mathrm{E}_2): & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 90 \\
 & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

この問題の最適な目的関数値を知るには，もちろんシンプレックス法を適用すればよいのですが，ここではシンプレックス法などのアルゴリズムは使わずに，その値がどの程度の大きさなのか，その上限を予測してみます．

目的関数の値を z で表し，

$$(\mathrm{E}_3):\quad z \;=\; 15x_1 \;+\; 20x_2$$

とおきます．また，(E_1) の両辺を 4 倍して次の不等式をえます:

$$(\mathrm{E}_1 \times 4):\qquad 16x_1 \;+\; 24x_2 \;\leq\; 960.$$

この 2 つの式で変数 x_1, x_2 の係数をそれぞれ比較すると，いずれも $(\mathrm{E}_1 \times 4)$ の方が大きくなっています．変数はともに非負に制約されていますので，任意の実行可能解 $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2)$ に対して

$$z \;=\; 15x_1 \;+\; 20x_2 \;\leq\; 960 \tag{4.1}$$

の成り立つことがわかります．これで目的関数値 z の上界の 1 つ 960 が判明しました．

では，もっとよい上界は求められないでしょうか．関係式 (4.1) をえるために制約条件 (E_1) と変数の非負条件を使いましたが，まだ制約条件 (E_2) を利用していません．そこで，(E_1) と (E_2) に正の係数 3 と 2 をかけて，この 2 つを足し合わせてみましょう:

$$(\mathrm{E}_1 \times 3 + \mathrm{E}_2 \times 2): \qquad 16x_1 \;+\; 20x_2 \;\leq\; 900.$$

関係式 (4.1) をえたのと全く同じ理由で，新しい，よりよい上界がえられます:

$$z \;\leq\; 900.$$

以上の議論をさらに進めてみましょう．そのために，制約条件 (E_1) と (E_2) に特定の係数をかけて足し合わせるのではなく，任意の

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0 \tag{4.2}$$

をかけ，(E_1) と (E_2) の非負 1 次結合:

$$(\mathrm{E}_1 \times y_1 + \mathrm{E}_2 \times y_2): \qquad (4y_1 + 2y_2)x_1 \;+\; (6y_1 + y_2)x_2 \;\leq\; 240y_1 + 90y_2 \tag{4.3}$$

を作ってみます．この式の右辺の値が LP の上界になるには，これまでの議論から

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 4y_1 & + & 2y_2 & \geq & 15 \\ 6y_1 & + & y_2 & \geq & 20 \end{array}\right\} \tag{4.4}$$

が成り立てばよいことがわかります．したがって，(4.2) と (4.4) を満足する $\mathbf{y} = (y_1,\ y_2)$ で不等式 (4.3) の右辺の値を最小にするものを求めれば，目的関数値 z の最も良い上界が得られることになります．つまり，例 4.1 の線形計画問題の上限を求める問題は，結局，LP:

$$\left|\begin{array}{lrcrcr} \text{最小化} & 240y_1 & + & 90y_2 & & \\ \text{条　件} & 4y_1 & + & 2y_2 & \geq & 15 \\ & 6y_1 & + & y_2 & \geq & 20 \\ & & & y_1,\ y_2 & \geq & 0 \end{array}\right. \tag{4.5}$$

に帰着します．

最適目的関数値の上限を求める問題 (4.5) を一般化したものが双対問題です．基準型の線形計画問題:

$$
\left|\begin{array}{lccccccc}
\text{最大化} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & +\cdots+ & c_nx_n & & \\
\text{条　件} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
 & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & \leq & b_m \\
 & & & & & x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n & \geq & 0
\end{array}\right. \tag{4.6}
$$

に対し，次に定義する

$$
\left|\begin{array}{lccccccc}
\text{最小化} & b_1y_1 & + & b_2y_2 & +\cdots+ & b_my_m & & \\
\text{条　件} & a_{11}y_1 & + & a_{21}y_2 & +\cdots+ & a_{m1}y_m & \geq & c_1 \\
 & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & a_{1n}y_1 & + & a_{2n}y_2 & +\cdots+ & a_{mn}y_m & \geq & c_n \\
 & & & & & y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m & \geq & 0
\end{array}\right. \tag{4.7}
$$

を (4.6) の**双対問題** (dual problem) とよびます．また双対問題 (4.7) に対して，もとの問題 (4.6) を**主問題** (primal problem) とよびます．

主問題が基準形であっても，その双対問題は基準形とはなりません．しかし，2.1 節で説明した変換を用いれば簡単に基準形の問題:

$$
\left|\begin{array}{lcccccccc}
\text{最大化} & - & b_1y_1 & - & b_2y_2 & -\cdots- & b_my_m & & \\
\text{条　件} & - & a_{11}y_1 & - & a_{21}y_2 & -\cdots- & a_{m1}y_m & \leq & c_1 \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & - & a_{1n}y_1 & - & a_{2n}y_2 & -\cdots- & a_{mn}y_m & \leq & c_n \\
 & & & & & & y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m & \geq & 0
\end{array}\right. \tag{4.8}
$$

に書き換えられます．さらに，この双対問題を作ると

$$
\left|\begin{array}{lcccccccc}
\text{最小化} & - & c_1x_1 & - & c_2x_2 & -\cdots- & c_nx_n & & \\
\text{条　件} & - & a_{11}x_1 & - & a_{12}x_2 & -\cdots- & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & - & a_{m1}x_1 & - & a_{m2}x_2 & -\cdots- & a_{mn}x_n & \geq & b_m \\
 & & & & & & x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n & \geq & 0
\end{array}\right. \tag{4.9}
$$

となって明らかに (4.6) と同値な問題となります．これより，

- 双対問題の双対問題は主問題である

ことが確かめられます．

4.2 双対定理

双対問題 (4.7) の作り方から直ちに導かれるのが次の性質です:

定理 4.1. [弱双対定理]
主問題 (4.6) と双対問題 (4.7) それぞれの任意の実行可能解 $\mathbf{x} = (x_1, \ \ldots, \ x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ \ldots, \ y_m)$ に対して

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

が成り立つ． □

さらに，この定理から次の 2 つの命題が簡単に導かれます:

系 4.2. 主 (双対) 問題が非有界であれば，双対 (主) 問題は実行不可能である． □

系 4.3. 主問題 (4.6) と双対問題 (4.7) それぞれ実行可能解 $\mathbf{x} = (x_1, \ \ldots, \ x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ \ldots, \ y_m)$ で，

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

を満たすものが存在すれば，その $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ はそれぞれの問題の最適解である． □

系 の例として，例 4.1 の LP とその双対問題 (4.5) を取り上げてみましょう．まず，主問題の実行可能解を次のように取ります:

$$x_1 = 75 \,/\, 2, \quad x_2 = 15.$$

この実行可能解での目的関数値は

$$z = 15 \times (75 \,/\, 2) + 20 \times 15 = 1725 \,/\, 2$$

です．一方，

$$y_1 = 25\,/\,8, \quad y_2 = 5\,/\,4$$

は双対問題の実行可能解で，目的関数値は

$$w = 240 \times (25\,/\,8) + 90 \times (5\,/\,4) = 1725\,/\,2$$

となっています．2つの目的関数値が一致しましたので，系4.2から実行可能解 $\mathbf{x} = (75/2,\ 15)$, $\mathbf{y} = (25\,/\,8,\ 5\,/\,4)$ はそれぞれの問題の最適解であることを確認できます.

系 4.2 は LP の実行可能解が最適解であるための十分条件を与えていますが，次の定理はその逆も正しいことを主張します:

定理 4.4. [**双対定理**]
主 (双対) 問題に最適解が存在すれば，双対 (主) 問題にも最適解が存在し，両者の最適目的関数値は一致する.

この定理の証明は後回しにして，ここでは双対定理から導かれる次の重要な結果を紹介しましょう:

定理 4.5. [**相補性定理**]
主問題と双対問題それぞれの実行可能解 $\mathbf{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1,\ \ldots,\ y_m)$ が最適解であるための必要十分条件は，次の**相補スラック性条件** (complimentary slackness) が成り立つことである:

- 各 $j = 1,\ \ldots,\ n$ について

$$x_j = 0 \ \text{ または } \ a_{1j}y_1 + \cdots + a_{mj}y_m = c_j,$$

- 各 $i = 1,\ \ldots,\ m$ について

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \ \text{ または } \ y_i = 0.$$

証明: 主問題と双対問題の実行可能解をそれぞれ $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ としよう．双対定理から，$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ が最適解であるための必要十分条件は両者の目的関数値が一致すること:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{4.10}$$

である．一方，

$$\begin{array}{rcrcll} x_{n+i} & = & b_i & - & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, & i = 1, \ldots, m \\ y_{m+j} & = & -c_j & + & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i, & j = 1, \ldots, n \end{array}$$

とおけば，

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ = \; & \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - y_{m+j} \right) x_j - \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} \right) y_i \\ = \; & -\sum_{j=1}^{n} y_{m+j} x_j - \sum_{i=1}^{n} x_{n+i} y_i \end{aligned} \tag{4.11}$$

となる．(4.10) が成り立つための必要十分条件は，(4.11) の右辺がゼロとなることである．ところが，$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ の実行可能性から x_j, y_i, x_{n+i}, y_{m+j} はすべての非負なので，この条件は，

- 各 j について $x_j = 0$ または $y_{m+j} = 0$,
- 各 i について $x_{n+i} = 0$ または $y_i = 0$

と等価であり，これは相補スラック性条件に他ならない． □

以上の結果をまとめると次の表のようになります．ここで，○は起こりうる，×は起こりえないことを示します．

		双対問題		
		最適解が存在	実行不可能	非有界
主問題	最適解が存在	○	×	×
	実行不可能	×	○	○
	非有界	×	○	×

宿題

4.1 定理 4.1，系 4.2，および 4.2 を証明せよ．

4.2 次の各問題の双対問題を書き，与えらえた解の最適性を調べよ:

(a)
$$\left|\begin{array}{lrrrrrrrrcr} \text{最大化} & - & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & & \\ \text{条　件} & & 3x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & \leq & 4 \\ & - & x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & \leq & -2 \\ & - & 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & & & \leq & -3 \\ & & 2x_1 & + & 3x_2 & & & - & 3x_4 & \leq & 2 \\ & & & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4} & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$\mathbf{x} = (3\,/\,2,\ 0,\ 0,\ 1\,/\,2)$,　$\mathbf{y} = (1,\ 0,\ 2,\ 0)$.

(b)
$$\left|\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \text{最大化} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & & \\ \text{条　件} & 13x_1 & + & 16x_2 & + & 17x_3 & + & 15x_4 & + & 2x_5 & \leq & 8 \\ & 13x_1 & + & 10x_2 & + & 9x_3 & + & 17x_4 & + & 5x_5 & \leq & 7 \\ & 14x_1 & + & 2x_2 & + & 5x+3 & + & 8x_4 & + & 4x_5 & \leq & 1 \\ & & & & & \multicolumn{5}{r}{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5} & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$\mathbf{x} = (0,\ 1\,/\,2,\ 0,\ 0,\ 0)$,　$\mathbf{y} = (0,\ 1\,/\,30,\ 4\,/\,15)$.

4.3 LP とその最適解が以下のように与えられている．相補性定理を使って双対問題の最適解を求めよ:

$$\left|\begin{array}{lrrcrcl} \text{最大化} & & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{条　件} & & 2x_1 & + & 4x_2 & \leq & 1 \\ & - & 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 0 \\ & - & 3x_1 & - & 3x_2 & \leq & 0 \\ & & 5x_1 & - & 5x_2 & \leq & 0 \\ & - & 5x_1 & - & 3x_2 & \leq & 0 \\ & & 2x_1 & - & 8x_2 & \leq & 0 \\ & & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0, \end{array}\right. \qquad \mathbf{x} = (1\,/\,6,\ 1\,/\,6).$$

4.3 辞書の双対性

次に主問題と双対問題それぞれの辞書の間にどのような関連があるのか調べてみましょう．証明を後回しにした LP の双対定理は，この関連から導くことができます．

例 4.2. 主問題:

$$\left|\begin{array}{lrcrcr} \text{最大化} & 15x_1 & + & 20x_2 & & \\ \text{条　件} & 4x_1 & + & 6x_2 & \leq & 240 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 90 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 100 \\ & & & x_1,\ x_2 & \geq 0, & \end{array}\right. \tag{4.12}$$

双対問題:

$$\left|\begin{array}{lrcrcrcr} \text{最小化} & 240y_1 & + & 90y_2 & + & 100y_3 & & \\ & 4y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & \geq & 15 \\ & 6y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & \geq & 20 \\ & & & & y_1,\ y_2,\ & y_3 & \geq & 0. \end{array}\right. \tag{4.13}$$

すでに述べたように，双対問題 (4.13) は単純な変換で基準形の問題:

$$\left|\begin{array}{lcrcrcrcr} \text{最大化} & - & 240y_1 & - & 90y_2 & - & 100y_3 & & \\ & - & 4y_1 & - & 2y_2 & - & y_3 & \leq & -15 \\ & - & 6y_1 & - & y_2 & - & 2y_3 & \leq & -20 \\ & & & & & y_1,\ y_2,\ & y_3 & \geq & 0. \end{array}\right. \tag{4.14}$$

に書き換えられます．主問題，双対問題それぞれにスラック変数 $(x_3,\ x_4,\ x_5)$, $(y_4,\ y_5)$ を導入して次のような辞書を定義します:

$$\left|\begin{array}{lcrcrcr} x_3 & = & 240 & - & 4x_1 & - & 6x_2 \\ x_4 & = & 90 & - & 2x_1 & - & x_2 \\ x_5 & = & 100 & - & x_1 & - & 2x_2 \\ z & = & 0 & + & 15x_1 & + & 20x_2, \end{array}\right. \tag{4.15}$$

$$\left|\begin{array}{rcrcrcrcr} y_4 & = & -15 & + & 4y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 \\ y_5 & = & -20 & + & 6y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 \\ w & = & 0 & - & 240y_1 & - & 90y_2 & - & 100y_3. \end{array}\right. \tag{4.16}$$

双対問題の変数 y_1, y_2, y_3 は主問題の 3 本の制約式に対応していますので，主問題のスラック変数 x_3, x_4, x_5 とは 1 対 1 に対応していることがわかります．また同様に，主問題の変数 x_1, x_2 は双対問題のスラック変数 y_4, y_5 に 1 対 1 に対応しています．つまり，

$$\left.\begin{array}{llll} x_j & \longleftrightarrow & y_{m+j}, & j=1,\ \ldots,\ n \\ x_{n+i} & \longleftrightarrow & y_i, & i=1,\ \ldots,\ m \end{array}\right\} \tag{4.17}$$

の対応があるわけです．さらに，

$$\left.\begin{array}{lll} x_j \text{が} (k \text{ 番目の}) \text{基底変数} & \longrightarrow & \text{対応する } y_i \text{ は } (k \text{ 番目の}) \text{非基底変数} \\ x_j \text{が} (k \text{ 番目の}) \text{非基底変数} & \longrightarrow & \text{対応する } y_i \text{ は } (k \text{ 番目の}) \text{基底変数} \end{array}\right\} \tag{4.18}$$

となっていることにも注意してください．

辞書 (4.15) と (4.16) の係数を比べてみましょう．係数だけを使って行列表現すると，２つの辞書はそれぞれ

$$\begin{array}{c|r|rr|} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{x_1} & \multicolumn{1}{c}{x_2} \\ \cline{2-4} x_3 & 240 & -4 & -6 \\ x_4 & 90 & -2 & -1 \\ x_5 & 100 & -1 & -2 \\ \cline{2-4} z & 0 & 15 & 20 \\ \cline{2-4} \end{array} \tag{4.19}$$

$$\begin{array}{c|r|rrr|} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{y_1} & \multicolumn{1}{c}{y_2} & \multicolumn{1}{c}{y_3} \\ \cline{2-5} y_4 & -15 & 4 & 2 & 1 \\ y_5 & -20 & 6 & 1 & 2 \\ \cline{2-5} w & 0 & -240 & -90 & -100 \\ \cline{2-5} \end{array} \tag{4.20}$$

と表せます．これから明らかなように係数の対応は，

$$
\text{主問題:}\quad
\begin{array}{|c|c|}
\hline
\mathbf{b} & \mathbf{A} \\
\hline
\mathbf{c}_0 & \mathbf{c} \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\text{双対問題:}\quad
\begin{array}{|c|c|}
\hline
-\mathbf{c}^\top & -\mathbf{A}^\top \\
\hline
-\mathbf{c}_0^\top & -\mathbf{b}^\top \\
\hline
\end{array}
\tag{4.21}
$$

となっています．ただし，ここで $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, c_0 はそれぞれ $m \times n$, $m \times 1$, $1 \times n$, 1×1 の行列を表します．

以上の (4.17), (4.18), (4.21) から主問題と双対問題の初期辞書の対応関係が確かめられました．この関係を使えば，主問題の初期辞書から双対問題の初期辞書を構成することも簡単にできるうえ，その逆も可能です．

今度は，ピボット演算と主・双対辞書の対応を調べてみましょう．例えば，辞書 (4.19) で，(1, 2) を中心としてピボット演算を行えば次の辞書がえられます:

$$
\begin{array}{c|r|rr|}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & x_1 & \multicolumn{1}{c}{x_3} \\
\cline{2-4}
x_2 & 40 & -2/3 & -1/6 \\
x_4 & 50 & -4/3 & 1/6 \\
x_5 & 20 & 1/3 & 1/3 \\
\cline{2-4}
z & 800 & 5/3 & -10/3 \\
\cline{2-4}
\end{array}
\tag{4.22}
$$

一方，双対辞書 (4.20) で，これに対応する位置 (2, 1) を中心にピボット演算すると

$$
\begin{array}{c|r|rrr|}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & y_5 & y_2 & \multicolumn{1}{c}{y_3} \\
\cline{2-5}
y_4 & -5/3 & 2/3 & 4/3 & -1/3 \\
y_1 & 10/3 & 1/6 & -1/6 & -1/3 \\
\cline{2-5}
w & -800 & -40 & -50 & -20 \\
\cline{2-5}
\end{array}
\tag{4.23}
$$

がえられます．この 2 つの辞書を見比べてみてください．初期辞書で成り立っていた対応関係 (4.17), (4.18), (4.21) が，ピボット演算ののちの辞書の組 (4.22), (4.23) でも満たされています．このことから，一般に次のことを予想できます:

補題 4.6. [辞書の双対性]
主問題の辞書に対し，条件 (4.17), (4.18), (4.21) によって定まる双対問題の辞書が存在する．

□

ここでは補題の証明を省きますが，対応する主および双対辞書に対し，対称的な ピボット演算，つまり $(r,\ s)$ と $(s,\ r)$ を中心とするピボット演算が再び対応する辞書を生成することを示せば十分です．

辞書の双対性から直ちに導かれる重要な結果は，

- 主問題の辞書の最適性と対応する双対辞書の最適性が一致する

ことです．つまり (4.21) で主問題の最適性は，$\mathbf{b}$ の各成分が非負で $\mathbf{c}$ の各成分が非正であることですが，このことは対応する双対辞書が最適であること — つまり，$-\mathbf{b}^\mathsf{T}$ の各成分が非正で $-\mathbf{c}^\mathsf{T}$ の各成分が非負であること — に他なりません．

例を使って実際に確かめてみましょう．辞書 (4.22) に，(2, 1) を中心とするピボット演算を施すと

$$
\begin{array}{c|r|rr|}
 & & x_4 & x_3 \\
\hline
x_2 & 15 & 1/2 & -1/4 \\
x_1 & 75/2 & -3/4 & 1/8 \\
x_5 & 65/2 & -1/4 & 3/8 \\
\hline
z & 1725/2 & -5/4 & -25/8 \\
\hline
\end{array}
\tag{4.24}
$$

一方，双対辞書 (4.23) で，これに対応する位置 (1, 2) を中心にピボット演算すると

$$
\begin{array}{c|r|rrr|}
 & & y_5 & y_4 & y_3 \\
\hline
y_2 & 5/4 & -1/2 & 3/4 & 1/4 \\
y_1 & 25/8 & 1/4 & -1/8 & -3/8 \\
\hline
w & -1725/2 & -15 & -75/2 & -65/2 \\
\hline
\end{array}
\tag{4.25}
$$

となります．辞書 (4.25) は (4.24) に対応する双対辞書で，辞書 (4.24) の最適性は (4.25) の最適性も意味します．そして，実際，主問題の最適辞書 (4.24) には主問題の最適解の情報ばかり

でなく，双対問題の最適解の情報も含まれています．つまり，最適辞書 (4.24) の目的関数行:

$$z \ = 1725/2 \ - \ 5/4x_4 \ - \ 25/8x_3$$

で，各非基底変数 x_4, x_3 の係数に -1 を掛けたものが対応する双対 (基底) 変数 y_2, y_1 の (最適解における) 値となっています．もちろん，これ以外の双対変数 y_5, y_4, y_3 は非基底変数であり，その値はゼロです．

4.4 双対定理の証明

それでは，双対定理 (定理 4.4) を証明しましょう．双対問題の双対が主問題になることから，主問題に最適解が存在するときだけを考えれば十分です．

証明: 主問題に最適解が存在する場合，2 段階シンプレックス法使うことによって最適な辞書 (D) がえられる．一方，補題 4.6 より，双対問題には (D) に対応する最適な辞書 (D*) が存在する．したがって，双対問題にも最適解が存在する．辞書 (D) と (D*) の関係 (4.21) から，明らかに両者の最適解における目的関数値は一致する (2 つの辞書の目的関数値は符号が反転していますが，これは双対問題を基準形に書き換えたためです)． □

ついでに，主問題の最適辞書 (D) から双対問題の最適解を求める方法を一般的に説明しておきましょう．辞書 (D) の目的関数行が

$$z \ = \ c_0 \ + \ c_1 x_{N(1)} \ + \ c_2 x_{N(2)} \ + \cdots + \ c_n x_{N(n)}$$

であったとします．(D) の最適性から c_j はすべて非正です．変数の対応 (4.17) から，双対問題の最適解の値 $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ は

$$y_i^* = \begin{cases} -c_j, & i = N(j) - n \text{ の場合} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases} \tag{4.26}$$

によって定めることができます．

4.5 主問題と双対問題どちらを解くべきか

LP は，与えられた問題を直接シンプレックス法で解く代わりに，その双対問題にシンプレックス法を適用しても解けることがわかりました．効率的に LP を解こうとするとき，主問題と双対問題のどちらを解く方が簡単かを事前に判別できれば便利です．この判別を理論的に結論づけることは困難ですが，経験的にはシンプレックス法の総ピボット回数は基底変数の数 m に強く依存し，非基底変数の数 n にはあまり影響を受けないことが知られています．つまり，m が n に比べて小さいときには主問題を解き，その逆の場合は双対問題を解くのが有利であると予想されます．

主問題と双対問題のどちらを解くべきかを判別する基準は，m, n の大小関係だけによるものではありません．例えば，主問題の初期辞書が実行可能でなく，双対問題の初期辞書が実行可能である場合を想像してみてください．主問題を解くには 2 段階シンプレックス法の第 1 段階から始める必要がありますが，双対問題では第 1 段階を省くことができます．このことから推測されるように，主問題・双対問題の何れかが自明な初期辞書をもてば，m, n の大きさに大きな違いがないかぎり，その実行可能辞書をもつ問題を解く方が有利といえます．

宿題

4.4 LP が次のような辞書をもつとき，双対辞書は実行不可能であることを証明せよ．(注意: 辞書の実行可能性は仮定しない．)

	$\exists j$ 列
	$\oplus$ $\vdots$ $\oplus$
	$+$

$\oplus$: 非負の成分

$+$: 正の成分.

4.5 次の各最適辞書から双対問題の最適解を求めよ:

(a)
$$
\begin{array}{|lcrcrcrcr}
x_5 & = & 0.14 & + & 0.22x_4 & + & 0.76x_8 & - & 0.89x_1 \\
x_3 & = & 1.25 & & & - & 0.13x_8 & - & 1.00x_1 \\
x_6 & = & 1.11 & + & 0.78x_4 & + & 0.11x_8 & + & 4.89x_1 \\
x_7 & = & 6.94 & + & 0.11x_4 & + & 0.19x_8 & - & 2.44x_1 \\
x_2 & = & 0.56 & - & 0.11x_4 & + & 0.06x_8 & - & 0.56x_1 \\
x_9 & = & 9.44 & + & 0.11x_4 & - & 0.06x_8 & - & 6.44x_1 \\
z & = & 1.81 & - & 0.11x_4 & - & 0.07x_8 & - & 0.56x_1.
\end{array}
$$

(b)
$$
\begin{array}{|lcrcrcrcrcr}
x_3 & = & 2.50 & - & 0.25x_5 & - & 2.25x_2 & - & 2.25x_1 & - & 2.25x_4 \\
x_6 & = & 2.25 & + & 0.75x_5 & - & 0.25x_2 & + & 4.75x_1 & - & 0.25x_4 \\
x_7 & = & 7.50 & + & 0.25x_5 & - & 2.75x_2 & - & 1.75x_1 & + & 0.25x_4 \\
z & = & 2.50 & - & 0.25x_5 & - & 1.25x_2 & - & 1.25x_1 & - & 1.25x_4.
\end{array}
$$

4.6 基準形の LP:

$$
\begin{array}{|llcl}
\text{最大化} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\
\text{条　件} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\
 & x_j & \geq & 0, \quad j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

の最適目的関数値を z^*，双対問題の最適解を $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*$ とする．このとき任意の値 $t_1, t_2, \ldots, t_m$ と，LP:

$$
\begin{array}{|llcl}
\text{最大化} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\
\text{条　件} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i + t_i, \quad i = 1, \ldots, m \\
 & x_j & \geq & 0, \qquad\quad j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

の実行可能解 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して次の関係が成り立つことを示せ:

$$
\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq z^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* t_i.
$$