6 最短路問題

最短路問題はネットワーク流における最も基本的な問題であり，輸送，通信ネットワークなどの効率的な管理・運用には欠かすことができません．グラフ $G=(V,E)$ と各枝 $(i,j)\in E$ の長さ c_{ij} によって定まるネットワーク上で特定の頂点 s から他のすべての頂点への最短路を求めるこの問題は，問題 (2.2) の特殊ケースとして次のように定式化できます:

$$
\left|\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} \\
\text{条　件} & \displaystyle\sum_{\{j|(i,j)\in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i)\in E\}} x_{ji} = \begin{cases} n-1, & i=s \\ -1, & \forall i\in V\setminus\{s\} \end{cases} \\
 & 0\le x_{ij}\le n,\quad \forall(i,j)\in E.
\end{array}\right. \tag{6.4}
$$

以下では，

仮定 6.1. グラフ G には頂点 s から各頂点 $i\in V\setminus\{s\}$ への有向路が存在する

ものとします．もしも頂点 s から i への有向路が存在しなければ，人工的に枝 (s,i) を G に加え，その長さを $c_{si}=+\infty$ と定義することで仮定 6.1 は一般性を失いません．

6.1 最短路問題の基本構造

アルゴリズムを紹介する前に問題 (6.4) の基本的な構造を少し調べておきましょう．

最短路の性質． まず，最短路のもつ性質をいくつか列挙しましょう:

性質 6.1. 頂点 s から k への最短路が存在すれば，頂点 k への最短の単純有向路が存在する．

性質 6.2. 有向路 $P_k=(s=i_1,i_2,\dots,i_h=k)$ が頂点 k への最短路ならば，各 $\ell=2,3,\dots,h-1$ に対して $P_\ell=(i_1,\dots,i_\ell)$ は頂点 i_ℓ への最短路である．

性質 6.3. 任意の頂点 $i\in V$ への最短距離を $d(i)$ で表すとき，有向路 P_k が頂点 k への最短路であるための必要十分条件は，

$$d(j)=d(i)+c_{ij},\quad \forall(i,j)\in P_k. \tag{6.5}$$

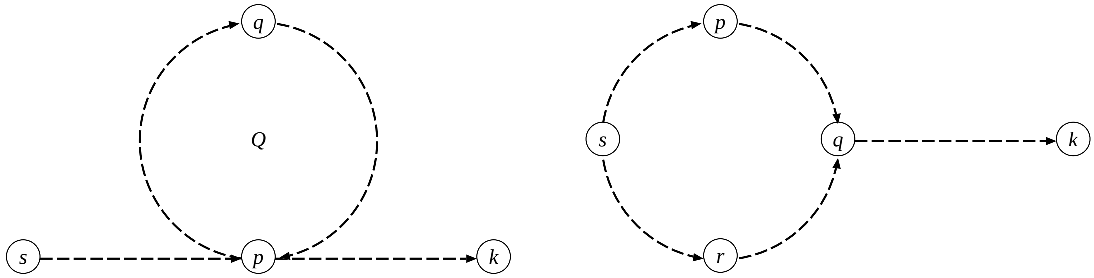

図 6.2: 性質 6.1 と性質 6.2.

図 6.2 の左の絵を使って性質 6.1 を示しましょう．これは，頂点 k への有向路を表していますが，そこには有向閉路 Q が含まれています．もし，

$$\sum_{(i,j)\in Q} c_{ij} < 0 \tag{6.6}$$

が成り立たなければ，閉路 Q を通る価値はなく，頂点 p から直接 k へ向かう方が距離は短くなります．では，(6.6) が成り立てばどうでしょうか？ 有向閉路 Q を 1 周するごとに頂点 k への距離は短くなるので，頂点 k への最短路を定めることはできません．

次の性質 6.2 も容易に示すことができます．図 6.2 の右の絵において，頂点 k への最短路を $P_k = (s, \ldots, p, \ldots, q, \ldots, k)$ とし，部分路 $P_q = (s, \ldots, p, \ldots, q)$ は q への最短路になっていないものと仮定しましょう．すると，

$$\sum_{(i,j)\in P} c_{ij} < \sum_{(i,j)\in P_q} c_{ij}$$

を満たす頂点 s から q への最短路 $P = (s, \ldots, r, \ldots, q)$ が存在します．したがって，P_q の代わりに P を通る頂点 k への有向路 $P'_k = (s, \ldots, r, \ldots, q, \ldots, k)$ は

$$\sum_{(i,j)\in P'_k} c_{ij} < \sum_{(i,j)\in P_k} c_{ij}$$

となって，P_k が最短であることに矛盾します．

性質 6.3 の (6.5) が必要条件であることは性質 6.2 から直ちに導かれます．十分性を示しましょう:

いま，$P_k = (s = i_1, \ldots, i_h = k)$ とすれば，$d(i_1) = 0$ なので

$$d(k) = d(i_h) = (d(i_h) - d(i_{h-1})) + (d(i_{h-1}) - d(i_{h-2})) + \cdots + (d(i_2) - d(i_1))$$

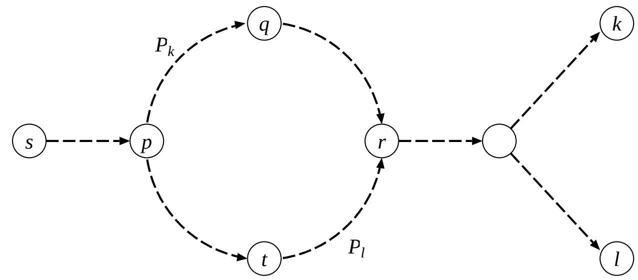

図 6.3: 性質 6.4.

が成り立ちます．もしも (6.5) が満たされれば，各枝 $(i,j) \in P_k$ に対して $d(j) - d(i) = c_{ij}$ となり，

$$d(k) = c_{i_{h-1}i_h} + c_{i_{h-2}i_{h-1}} + \cdots + c_{i_1 i_2} = \sum_{(i,j)\in P_k} c_{ij}$$

が得られます．

最短路木． 性質 6.1 により，以後，各頂点 k への最短路 P_k には閉路が含まれていないものと仮定することにします．さて，P_K を枝の集合と考え，

$$T = \bigcup_{k\in V} P_k \subseteq E$$

を定義しましょう．枝集合 T は各最短路 P_k をじょうずに選択することで（P_k を単純路と仮定しても一意とは限らないことに注意）グラフ G の全域木をつくることができます．

仮に T が全域木でないとすると，各最短路には閉路が含まれないことから，図 6.3 に示すように複数の最短路によって閉路 Q が構成されるはずです．頂点 k, ℓ への最短路をそれぞれ $P_k = (s,\ldots,p,\ldots,q,\ldots,r,\ldots,k)$, $P_\ell = (s,\ldots,p,\ldots,t,\ldots,r,\ldots,\ell)$ とすれば，性質 6.2 により，その部分路 $P_r = (s,\ldots,p,\ldots,q,\ldots,r)$ と $P' = (s,\ldots,p,\ldots,t,\ldots,r)$ の長さはともに $d(r)$ に等しくなります．したがって，P_r を P'_r と入れ替えた $P'_k = (s,\ldots,p,\ldots,t,\ldots,r,\ldots,k)$ も最短路となり，$T = (T \setminus P_k) \cup P'_k$ とすることで閉路 Q は解消されます．

性質 6.4. すべての頂点 k への最短路によってグラフ G の全域木を構成できる．

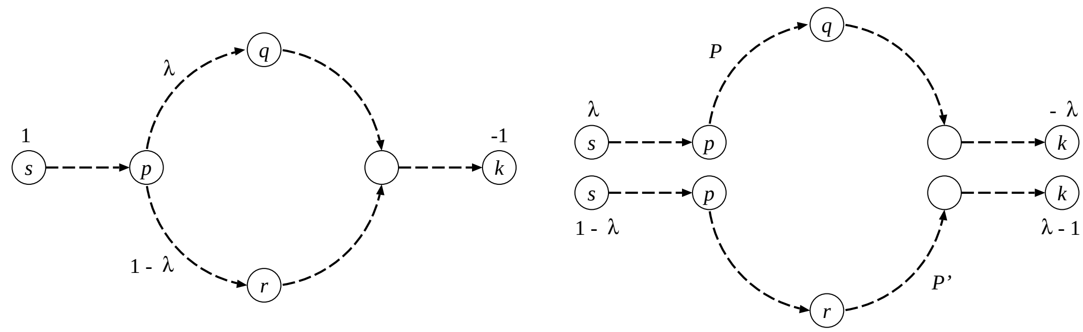

図 6.4: 性質 6.5.

最適流の整数性． 各頂点 k への最短路 P_k を使って問題 (6.4) の最適流 $\mathbf{x}^*$ を表してみましょう．最短路 P_k は単純路なので，各枝 $(i,j) \in E$ を高々 1 度しか通りません．そこで，

$$\delta(P_k) = \begin{cases} 1, & (i,j) \in P_k \text{ のとき} \\ 0, & (i,j) \notin P_k \text{ のとき,} \end{cases}$$

と定めれば，$\mathbf{x}^*$ は

$$x^*_{ij} = \sum_{k \in V} \delta(P_k) \tag{6.7}$$

によって与えられることがわかります．逆に，各頂点 k への最短路 P_k を与える最適流は本当に存在するのでしょうか？

問題 (6.4) は最小費用流問題 (2.1) の特殊ケースであるため，変数には流量保存条件と容量条件しか課せられておらず，x_{ij} が実数値をとることも許しています．仮に整数値をとらない x^*_{ij} が存在するとすれば，図 6.4 の左に示すようにある需要点 k は供給点 s から 1 単位の流れを複数の経路を通して受け取るはずです．この例の場合，右図のように頂点 k へは 2 つの有向路 $P = (s, \ldots, p, \ldots, q, \ldots, k)$, $P' = (s, \ldots, p, \ldots, r, \ldots, k)$ が存在し，それぞれに λ, $1 - \lambda$ (> 0) 単位が流れることになります．このとき，頂点 s から k へ 1 単位の流れを送るのに必要な費用は

$$c(\lambda) = \lambda \sum_{(i,j) \in P} c_{ij} + (1 - \lambda) \sum_{(i,j) \in P'} c_{ij}$$

です．しかし，

$$c(\lambda) \geq \min \left\{ \sum_{(i,j) \in P} c_{ij}, \sum_{(i,j) \in P'} c_{ij} \right\}, \quad 0 < \forall \lambda < 1,$$

が成り立つことから，２つの有向路 P, P' のうち一方にだけ 1 単位を流しても費用は増加しません; その一方の有向路が頂点 k への最短路です．この観察からわかるのは: 整数，実数を問わず，問題 6.4 に最適流が存在すれば，頂点 s から各頂点 k への最小費用の有向路，つまり最短路 P_k が存在する; そして，そこに 1 単位を流すことで得られる整数解も (6.4) の最適解となる，ことです．

性質 6.5.　問題 (6.4) に最適流が存在すれば，整数ベクトルとなる最適流 $\mathbf{x}^*$ が存在する．

6.2　ダイクストラ法

これから紹介するダイクストラ法 (Dijkstra's algorithm) は，ネットワークが

$$c_{ij} \geq 0, \quad \forall(i,j) \in E \tag{6.8}$$

を満足しなければ正しく機能しません．しかし，その効率は最短路問題のあらゆる厳密解法の中で最も優れています．基本となる操作は，出発点 s から扇状に探索の木を広げていき，頂点 s から近い順に各頂点 i への距離の記されたラベル $d(i)$ を貼りつけることです．この距離ラベルには，本当の最短距離の記された**永久ラベル** (permanent label) と，仮の最短距離の記された**一時ラベル** (temporary label) があり，頂点集合 V は前者の貼られた集合 $\mathcal{P}$ と後者の貼られた集合 $\mathcal{T}$ に分割されます．

アルゴリズムはまず，$\mathcal{P} = \{s\}$, $\mathcal{T} = V \setminus \{s\}$ として，頂点 s には永久ラベル $d(s) = 0$ を貼り，他の頂点 j には一時ラベル

$$d(j) = \begin{cases} c_{sj}, & (s,j) \in E \text{ のとき} \\ \infty, & \text{そうでないとき,} \end{cases}$$

を貼ります．各反復では，永久，一時にかかわらず，どのラベル $d(j)$ も，

(a)　出発点 s から途中，**集合 $\mathcal{P}$ の頂点だけを通って** j へ向かう有向路の中で最短の長さ

を表します．アルゴリズムは，一時ラベルの頂点集合 $\mathcal{T}$ の中から最も小さい距離ラベル $d(i)$ の頂点 i を選んで $d(i)$ を永久ラベルとし，i を始点とする枝の集合:

$$E(i) = \{(i,j) \in E \mid j \in V\}$$

の各終点のラベルが (a) を保つように更新します．すべての頂点に永久ラベルが貼られた時点，つまり $\mathcal{P} = V$ ととなったら終了です．

アルゴリズムとその正当性． 以上のアウトラインに沿ってアルゴリズムとしてまとめたものが次の DIJKSTRA である:

algorithm DIJKSTRA

$\mathcal{P} := \{s\}$; $\mathcal{T} := V \setminus \{s\}$;
$d(s) := 0$; $\mathrm{pred}(s) := 0$;
if $(s,j) \in E$ then $d(j) := c_{sj}$ と $\mathrm{pred}(j) := s$ を初期化する
else $d(j) := \infty$;
while $\mathcal{P} \neq V$ do begin
  $d(i) = \min\{d(j) \mid j \in \mathcal{T}\}$ を満たす頂点 i を選ぶ; { 頂点の選択 }
  $\mathcal{P} := \mathcal{P} \cup \{i\}$; $\mathcal{T} := \mathcal{T} \setminus \{i\}$;
  for 各 $(i,j) \in E(i)$ do { ラベルの更新 }
    if $d(j) > d(i) + c_{ij}$ then $d(j) := d(i) + c_{ij}$ と $\mathrm{pred}(j) := i$ を更新する
end
end;

各反復で $\mathrm{pred}(i)$ は，長さ $d(i)$ の有向路で頂点 i の直前に訪れる頂点を指し示すように更新されます．したがって終了時には，この指標をもとに各頂点 i から出発点 s までの最短路を逆に辿ることができます．

定理 6.6. DIJKSTRA はグラフ $G = (V, E)$ の 1 つの頂点 $s \in V$ から他のすべての頂点 $i \in V \setminus \{s\}$ への最短路を与える．

証明: 帰納法によって証明しましょう．

ある反復で，各ラベル $d(j)$ は (a) を満たし，それが永久ラベル，つまり $j \in \mathcal{P}$ ならば，

(b) 出発点 s から j へ向かう本当の最短路の長さ

を表しているものと仮定する．次の反復では，

$$d(i) = \min\{d(j) \mid j \in \mathcal{T}\} \tag{6.9}$$

を満たす頂点 i が選ばれ，$\mathcal{P} := \mathcal{P} \cup \{i\}$ と更新されるが，この頂点 i のラベル $d(i)$ が「出発点 s からの本当の最短距離」となっていることを示せば，再び (a), (b) が満足されて証明終了である．これには，出発点 s から i への任意の有向路 P の長さが $d(i)$ 以上となることを示せばよい．

有向路 P を頂点 $s \in \mathcal{P}$ から辿ったとき，最初に訪れる $\mathcal{T}$ の頂点を k とすれば，(6.9) より，

$$d(k) \geq d(i)$$

である．一方，仮定 (6.8) より，頂点 s から i までの P に含まれる枝の長さはすべて非負である．この２つから，有向路 P の長さは $d(i)$ より短くなりえないことがわかる． ■

次に DIJKSTRA に最悪の場合どれだけの計算の手間がかかるのかを解析してみましょう．１回の反復では，

- 頂点 i の選択に $|\mathcal{T}|$ に比例する回数の比較;
- 頂点 i に隣接する頂点 j のラベル $d(j)$ の更新に $|E(i)|$ に比例する回数の足し算と比較

が必要です．反復は V の頂点の数だけ行われるので，これらは全体でそれぞれ

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = (n-1)n/2, \quad \sum_{i \in V} |E(i)| \leq m$$

となります．有向グラフの枝の本数 m は，完全グラフでも高々$m = n(n-1)$ に過ぎないので $m \leq n^2$ です．したがって，ダイクストラ法は高々n^2 に比例する程度の基本演算を行えば終了することがわかります．

演習問題

6.1 つくばエキスプレスを使って，つくばから秋葉原まで 1,150 円未満で行くことが可能かどうかを考察しなさい．