5 グラフとネットワーク流

線形計画問題は最適化の中核をなしますが，その中には問題のもつ特殊な構造に着目することでシンプレックス法などの汎用アルゴリズムを用いるよりも簡単に解けてしまうものが少なくありません．**ネットワーク流問題** (network flow problem) はその代表例であり，このことは制約式の係数行列がもつ特殊な性質に由来します．この節から 3 節にわたってネットワーク流問題を，その特殊構造を活かして効率よく解決するアルゴリズムについて解説します．

まず，ネットワーク流問題を特徴づける**グラフ** (graph) の諸用語を定義したのち，主要なネットワーク流問題を紹介しましょう．

5.1 グラフ

グラフ． 有限個の**頂点** (vertex, node) の集合 $V = \{1, 2, \ldots, m\}$ と，頂点対の集合 $E \subseteq V \times V \equiv \{(i, j) \mid i \in V,\ j \in V\}$ の組をグラフといい，$G = (V, E)$ で表します．集合 E に属する頂点対 $e = (i, j)$ をグラフ G の**枝** (arc, edge)，頂点 i と j を枝 e の**端点** (end node) とよび，枝 e は頂点 i, j に**接続する**といいます．どの枝の向きも考えないときは G を**無向グラフ** (undirected graph)，枝の向きを考えて (i, j) と (j, i) を区別するときには**有向グラフ**とよびます．

有向グラフでは枝 $e = (i, j)$ を有向枝 (directed arc) ともいい，頂点 i, j をそれぞれ e の**始点** (tail)，**終点** (head) といいます．有向，無向を問わず，頂点 i に接続する枝の本数を i の**次数** (degree) といい，特に有向グラフでは i を始点とする枝の数を i の**出次数** (out-degree)，i を終点とする枝の数を i の**入次数** (in-degree) といいます．

無向グラフ G ですべての頂点間に枝が存在するとき，G を**完全グラフ** (complete graph) とよびます．グラフ $G = (V, E)$ に対して V, E の部分集合をそれぞれ V', E' とするとき，任意の $e' \in E'$ の両端点が V' に属すならば，$G' = (V', E')$ は再びグラフとなります．そのような G' を G の**部分グラフ** (subgraph) といいます．特に $G = (V, E)$ で $V' \subseteq V$ に両端点をもつ枝の集合を E' とするとき，$G' = (V', E')$ は V' による G の**生成部分グラフ** (induced subgraph) であるといいます．

路． 有向グラフ $G=(V,E)$ の頂点の列 $P=(i_0,i_1,\ldots,i_p)$ が $(i_k,i_{k+1})\in E$ $(k=0,1,\ldots,p-1)$ を満たすとき，P を頂点 i_0 から i_p への**有向路** (directed path) とよびます．**無向路** (undirected path) も同様に定義されますが，無向路 $P=(i_0,i_1,\ldots,i_p)$ では隣接する２つの頂点 i_k, i_{k+1} に対して $(i_k,i_{k+1})\in E$ か $(i_{k+1},i_k)\in E$ のいずれか $(k=0,1,\ldots,p-1)$ が満たされます．有向路と無向路をあわせて単に**路** (path) とよびますが，路 P を頂点あるいは枝の集合とみなして $i\in P$ や $(i,j)\in P$ などの表現を用います．

始点 i_0 と終点 i_p が同じ頂点である路を**閉路** (circuit)，含まれる頂点 i_0, i_1, $\ldots$, i_p がすべて異なる路を**単純路** (simple path)，その両方の性質をもつ路を**単純閉路** (simple circuit) とよびます．グラフ G のすべての頂点を通る単純閉路を**ハミルトン閉路** (Hamiltonian circuit) とよびます．これらの閉路，単純路に対しても有向，無向が定義されます．

連結． グラフ G の任意の２つの頂点間に無向路が存在するとき，G は**連結グラフ** (connected graph) であるといいます．グラフ G が連結でなくとも，その連結な生成部分グラフ G' で，G' を真に含む連結生成部分グラフが存在しないとき，G' を G の**連結成分** (connected component) といいます．連結でないグラフは互いに頂点を共有しないいくつかの連結成分に分解されます．

木． グラフ G が閉路を含まないとき，G を**非巡回的** (acyclic) であるといいます．また，非巡回的な連結グラフ T を**木** (tree) とよびます．頂点数 n の連結グラフ T が木であるための必要十分条件は，T が $n-1$ 本の枝をもつことです．次数が 1 である木の頂点を**葉** (leaf) とよびますが，木には少なくとも２枚の葉が存在します．グラフ $G=(V,E)$ に対して G と同じ頂点集合をもつ部分グラフ $G'=(V,E')$ が木であるとき，G' を G の**全域木** (spanning tree) といいます．

5.2 ネットワーク流モデル

頂点数 $|V|=n$，枝数 $|E|=m$ の有向グラフ $G=(V,E)$ において，すべての枝 $(i,j)\in E$ に対して費用 c_{ij} と容量 u_{ij} が与えられているものとしましょう．それぞれの頂点 $i\in V$ には供給量あるいは需要量を表す値 b_i が対応して，$b_i>0$ ならば頂点 i を**供給点** (supply node)，

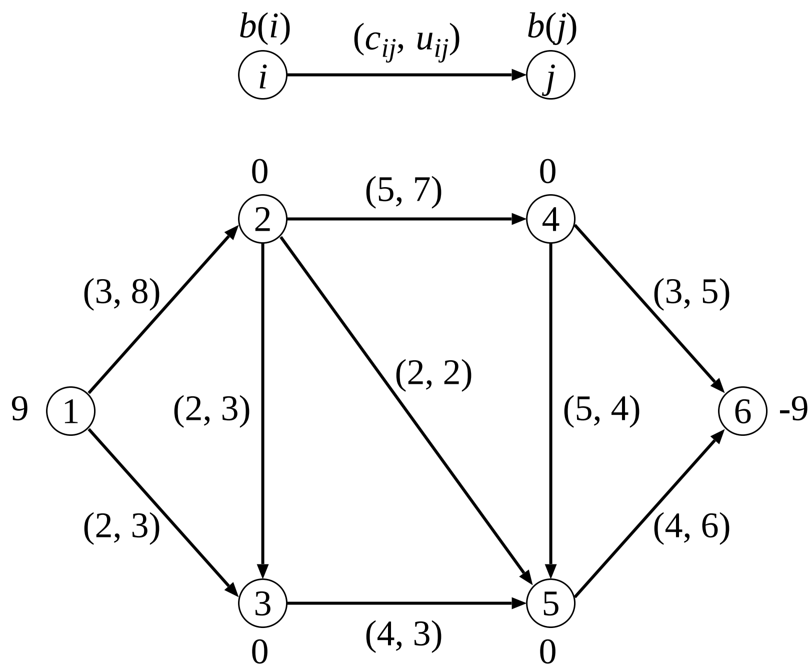

図 5.1: 最小費用流問題.

$b_i < 0$ ならば i を**需要点** (demand node)，また $b_i = 0$ ならば頂点 i を**中継点** (transshipment node) とよびます．このようにグラフ G の頂点や枝に何らかの情報（ここでは c_{ij}, u_{ij}, b_i）が付加されたものを**ネットワーク** (network) といいます．これ以降，

$$b_i \in \mathcal{Z}, \ \ \forall i \in V; \quad c_{ij}, u_{ij} \in \mathcal{Z}, \ \ \forall (i,j) \in E \tag{5.1}$$

であることを仮定します（ただし，$\mathcal{Z}$ は整数全体の集合を表します）．

ネットワーク上での最適化問題のほとんどは**最小費用流問題** (minimum cost flow problem) とよばれる次の線形計画問題として定式化されます:

$$\begin{array}{|lll}
\text{最小化} & \displaystyle\sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} & \qquad (5.2\text{a}) \\
\text{条　件} & \displaystyle\sum_{\{j|(i,j)\in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i)\in E\}} x_{ji} = b_i, \quad \forall i \in V & \qquad (5.2\text{b}) \\
 & 0 \le x_{ij} \le u_{ij}, \qquad\qquad \forall (i,j) \in E. & \qquad (5.2\text{c})
\end{array}$$

式 (5.2a) を**目的関数** (objective function)，式 (5.2b), (5.2c) を**制約条件** (constraints) とよぶ点は通常の線形計画問題と同じですが，変数値ベクトル $\mathbf{x} = (x_{ij})$ はネットワークの**流れ** (flow)

とよばれることもあります．制約式 (5.2b) は，頂点 i から出る流れの総量と i に入る流れの総量の差が需給量 b_i に等しくなければならないことを意味し，**流量保存条件** (flow conservation constraint) とよばれます．また (5.2c) は，枝 (i,j) の流れ x_{ij} が与えられた容量 u_{ij} を越えてはならないことを意味し，**容量条件** (capacity constraint) とよばれます．この２種類の制約条件を満足する流れ $\mathbf{x}$ を**実行可能流** (feasible flow)，その中で目的関数の値を最小にする流れ $\mathbf{x}^*$ を**最適流** (optimal flow) といいます．

式 (5.2b) の左辺の係数行列を $\mathbf{A}$ で表し，ベクトル $\mathbf{c} = (c_{ij})$，$\mathbf{u} = (u_{ij})$ を用いれば，問題 (5.2) を

$$\text{最小化}\ \{\mathbf{cx} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \ \mathbf{O} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}\} \tag{5.3}$$

のように簡潔に書くことができます．行列 $\mathbf{A}$ はグラフ G の**接続行列** (incidence matrix) とよばれ，その各行は G の各頂点に，また各列は各枝に対応し，G の枝と頂点の接続関係を表します．例えば，A_{ij} を枝 (i,j) に対応する $\mathbf{A}$ の列とすれば

$$\begin{array}{rcccccc} A_{ij}^{\mathsf{T}} = [0\cdots0 & +1 & 0\cdots0 & -0 & 0\cdots0] \\ & (\text{第}\ i\ \text{行}) & & (\text{第}\ j\ \text{行}) & \end{array}$$

であり，第 i, j 基本ベクトル $\mathbf{e}^i$, $\mathbf{e}^j$ を使って

$$A_{ij} = \mathbf{e}^i - \mathbf{e}^j$$

と表すことができます．したがって $\mathbf{A}$ は，mn 個の成分の中で $2m$ 個だけが非ゼロで，非ゼロ成分はすべて $+1$ か -1，また各列には $+1$ と -1 がちょうど 1 つづつ含まれます．この係数行列 $\mathbf{A}$ の特殊性からただちに次の２つが導かれます:

(a) 流量保存条件 (5.2b) をすべて足しあわせると

$$0 = \sum_{i \in V} b_i,\ \ \text{したがって}\quad \sum_{\{i \in V \mid b_i > 0\}} b_i = -\sum_{\{i \in V \mid b_i < 0\}} b_i.$$

言い換えれば，総供給量と総需要量が一致しなければ，流量保存条件 (5.2b) は満たされない．

(b) 逆に，総供給量と総需要量が一致すれば，流量保存条件 (5.2b) の和から自明な等式 $\mathbf{O}\mathbf{x} = 0$ が得られる．つまり，(5.2b) の任意の等式は，それ以外の等式の和に -1 を掛けたもの等しく，**冗長** (redundant) な制約式である．

最短路問題 (shortest path problem)． 与えられた頂点 1 から他のすべての頂点への最短距離の有向路を決定する問題です．問題 (1.2) において

$$u_{ij} = n, \ \forall (i,j) \in E; \quad b_i = \begin{cases} n-1, & i = 1 \\ -1, & \forall i \in V \setminus \{1\} \end{cases}$$

とし，c_{ij} を枝 (i,j) の長さとすれば，その最適解は頂点 1 から他の各頂点への最短路に沿って 1 単位の流れを送ります．

最大流問題 (maximum flow problem)． 特定の**入口** (source) 頂点 s から**出口** (sink) 頂点 t へできるだけ多くの流れを送る問題です．問題 (1.2) のネットワークに

$$c_{ts} = -1; \quad u_{ts} = +\infty$$

とする枝 (t,s) を人工的に追加し，

$$b_i = 0, \ \forall i \in V; \quad c_{ij} = 0, \ \forall (i,j) \in E$$

とすれば，その最適解は枝 (t,s) 上の流れを最大化します．この流れは頂点 s から頂点 t へのグラフ G 上の最大総流量に等しくなります．

割当問題 (assignment problem)． グラフ G の頂点集合は 2 つの部分集合 V_1, V_2 に等分割されて枝集合は $E \subseteq V_1 \times V_2$ を満たします．このとき，割当費用 c_{ij} の総和が最小となるように V_1 の各頂点を V_2 の 1 つの頂点に割り当てる問題です．これは問題 (1.2) で

$$b_i = 1, \ \forall i \in V_1; \quad b_i = -1, \ \forall i \in V_2; \quad u_{ij} = 1, \ \forall (i,j) \in E$$

とした場合に他なりません．

この他にも**ヒッチコック問題** (Hitchcock transportation problem) や**輸送問題** (transshipment problem) などがネットワーク流問題として有名ですが，これらもまた (1.2) の特殊ケースとして扱うことができます．こうしたネットワーク流問題の応用は工学をはじめ経済・経営システムまで枚挙にいとまがなく，したがって問題 (1.2) の効率的な解決が実社会に与える影響は極めて大きいといえます．

演習問題

5.1 グラフ $G = (V,\ E)$ が木であるための必要十分条件が $|E| = n - 1$ であることを示しなさい．

5.2 最短路問題の最適解では各 x_{ij} の値が 0 か 1 となる理由を考えなさい．

5.3 ある製品を生産する企業が，複数ある工場から倉庫へ製品を輸送するとき，総輸送費用を最小にするにはどの工場からどの倉庫へ何単位の製品を輸送すればよいか？ ただし，各工場の生産量，倉庫の需要量，および輸送費用は下の表のように与えられているものとする．この問題は，ヒッチコック型輸送問題とよばれる最小費用流問題の特殊ケースである．

工場 \ 倉庫	1	2	3	生産量
1	3 万円/単位	1	4	250 単位
2	2	6	7	300
3	8	4	3	220
4	5	2	4	350
需要量	400	300	200	900\1120