4 線形計画問題の双対性

シンプレックス法を用いた線形計画問題の解き方を一通り理解したところで，次は問題の最適性に関わる理論的な話に移りましょう．これから説明する**双対性** (duality) は，線形計画法の理論的な核をなすばかりでなく，実際の応用にも役立つきわめて重要な性質です．

4.1 双対問題

次の基準形 LP について考えましょう:

例 4.1.

$$\begin{array}{lrcrcl} & \text{最大化} \quad 15x_1 & + & 20x_2 & & \\ & \text{条　件} & & & & \\ (\mathrm{E}_1): & 4x_1 & + & 6x_2 & \leq & 240 \\ (\mathrm{E}_2): & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 90 \\ & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

この問題の最適な目的関数値を知るには，もちろんシンプレックス法を適用すればよいわけですが，ここではシンプレックス法などのアルゴリズムは使わずに，その値がどの程度の大きさなのか，その上限を予測してみます．

目的関数の値を z で表し，

$$(\mathrm{E}_3): \quad z = 15x_1 + 20x_2$$

とおきます．また，(E_1) の両辺を 4 倍して次の不等式をえます:

$$(\mathrm{E}_1 \times 4): \qquad 16x_1 + 24x_2 \leq 960.$$

この 2 つの式で変数 x_1, x_2 の係数をそれぞれ比較すると，いずれも $(\mathrm{E}_1 \times 4)$ の方が大きくなっています．変数はともに非負に制約されていますので，任意の実行可能解 $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2)$ に対して

$$z = 15x_1 + 20x_2 \leq 960 \tag{4.1}$$

の成り立つことがわかります．これで目的関数値 z の上界の 1 つ 960 が判明しました．

では，もっとよい上界は求められないでしょうか．関係式 (4.1) をえるために制約条件 (E_1) と変数の非負条件を使いましたが，まだ制約条件 (E_2) を利用していません．そこで，(E_1) と (E_2) に正の係数 3 と 2 をかけて，この 2 つを足し合わせてみましょう:

$$(\mathrm{E}_1 \times 3 + \mathrm{E}_2 \times 2): \qquad 16x_1 \quad + \quad 20x_2 \quad \leq \quad 900.$$

関係式 (4.1) をえたのと全く同じ理由で，新しい，よりよい上界がえられます:

$$z \quad \leq \quad 900.$$

以上の議論をさらに進めてみましょう．そのために，制約条件 (E_1) と (E_2) に特定の係数をかけて足し合わせるのではなく，任意の

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0 \tag{4.2}$$

をかけ，(E_1) と (E_2) の非負 1 次結合:

$$(\mathrm{E}_1 \times y_1 + \mathrm{E}_2 \times y_2): \qquad (4y_1 + 2y_2)x_1 \quad + \quad (6y_1 + y_2)x_2 \quad \leq \quad 240y_1 + 90y_2 \tag{4.3}$$

を作ってみます．この式の右辺の値が LP の上界になるには，これまでの議論から

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 4y_1 & + & 2y_2 & \geq & 15 \\ 6y_1 & + & y_2 & \geq & 20 \end{array}\right\} \tag{4.4}$$

が成り立てばよいことがわかります．したがって，(4.2) と (4.4) を満足する $\mathbf{y} = (y_1, \ y_2)$ で不等式 (4.3) の右辺の値を最小にするものを求めれば，目的関数値 z の最も良い上界が得られることになります．つまり，例 4.1 の線形計画問題の上限を求める問題は，結局，線形計画問題:

$$\left|\begin{array}{lrcrcr} \text{最小化} & 240y_1 & + & 90y_2 & & \\ \text{条　件} & 4y_1 & + & 2y_2 & \geq & 15 \\ & 6y_1 & + & y_2 & \geq & 20 \\ & & & y_1, \ y_2 & \geq & 0 \end{array}\right. \tag{4.5}$$

に帰着します．

最適目的関数値の上限を求める問題 (4.5) を一般化したものが双対問題です．基準型の線形計画問題:

$$
\left|\begin{array}{lccccccc}
\text{最大化} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & +\cdots+ & c_nx_n & & \\
\text{条　件} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
 & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & \leq & b_m \\
 & & & & x_1,\ x_2,\ \ldots, & x_n & \geq & 0
\end{array}\right. \tag{4.6}
$$

に対し，次に定義する

$$
\left|\begin{array}{lccccccc}
\text{最小化} & b_1y_1 & + & b_2y_2 & +\cdots+ & b_my_m & & \\
\text{条　件} & a_{11}y_1 & + & a_{21}y_2 & +\cdots+ & a_{m1}y_m & \geq & c_1 \\
 & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & a_{1n}y_1 & + & a_{2n}y_2 & +\cdots+ & a_{mn}y_m & \geq & c_n \\
 & & & & y_1,\ y_2,\ \ldots, & y_m & \geq & 0
\end{array}\right. \tag{4.7}
$$

を (4.6) の**双対問題** (dual problem) とよびます．また双対問題 (4.7) に対して，もとの問題 (4.6) を**主問題** (primal problem) とよびます．

主問題が基準形であっても，その双対問題は基準形とはなりません．しかし，2.1 節で説明した変換を用いれば簡単に基準形の問題:

$$
\left|\begin{array}{lcccccccc}
\text{最大化} & - & b_1y_1 & - & b_2y_2 & -\cdots- & b_my_m & & \\
\text{条　件} & - & a_{11}y_1 & - & a_{21}y_2 & -\cdots- & a_{m1}y_m & \leq & c_1 \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & - & a_{1n}y_1 & - & a_{2n}y_2 & -\cdots- & a_{mn}y_m & \leq & c_n \\
 & & & & & y_1,\ y_2,\ \ldots, & y_m & \geq & 0
\end{array}\right. \tag{4.8}
$$

に書き換えられます．さらに，この双対問題を作ると

$$
\left|\begin{array}{lcccccccc}
\text{最小化} & - & c_1x_1 & - & c_2x_2 & -\cdots- & c_nx_n & & \\
\text{条　件} & - & a_{11}x_1 & - & a_{12}x_2 & -\cdots- & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & - & a_{m1}x_1 & - & a_{m2}x_2 & -\cdots- & a_{mn}x_n & \geq & b_m \\
 & & & & & x_1,\ x_2,\ \ldots, & x_n & \geq & 0
\end{array}\right. \tag{4.9}
$$

となって明らかに (4.6) と同値な問題となります．これより，

- 双対問題の双対問題は主問題である

ことが確かめられます．

4.2 双対定理

双対問題 (4.7) の作り方から直ちに次の性質が導かれます:

定理 4.1. [**弱双対定理**]
主問題 (4.6) と双対問題 (4.7) それぞれの任意の実行可能解 $\mathbf{x} = (x_1, \ \ldots, \ x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ \ldots, \ y_m)$ に対して

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

が成り立つ． ■

さらに，この定理から次の２つの命題が簡単に導かれます:

系 4.2. 主 (双対) 問題が非有界であれば，双対 (主) 問題は実行不可能である． ■

系 4.3. 主問題 (4.6) と双対問題 (4.7) それぞれ実行可能解 $\mathbf{x} = (x_1, \ \ldots, \ x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ \ldots, \ y_m)$ で，

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

を満たすものが存在すれば，その $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ はそれぞれの問題の最適解である． ■

系 の例として，例 4.1 の LP とその双対問題 (4.5) を取り上げてみましょう．まず，主問題の実行可能解を次のように取ります:

$$x_1 = 75 \,/\, 2, \quad x_2 = 15.$$

この実行可能解での目的関数値は

$$z = 15 \times (75 \,/\, 2) + 20 \times 15 = 1725 \,/\, 2$$

です．一方，

$$y_1 = 25\,/\,8, \quad y_2 = 5\,/\,4$$

は双対問題の実行可能解で，目的関数値は

$$w = 240 \times (25\,/\,8) + 90 \times (5\,/\,4) = 1725\,/\,2$$

となっています．目的関数値が一致しましたので，系 4.2 から実行可能解 $\mathbf{x} = (75\,/\,2,\ \ 15)$, $\mathbf{y} = (25\,/\,8,\ \ 5\,/\,4)$ はそれぞれの問題の最適解であることが確かめられます．

系 4.2 は LP の実行可能解が最適解であるための十分条件を与えています．次の定理は，その逆も正しいことを主張します:

定理 4.4. [**双対定理**]
主 (双対) 問題に最適解が存在すれば，双対 (主) 問題にも最適解が存在し，両者の最適目的関数値は一致する．

この定理の証明は後回しにして，ここでは双対定理から導かれる次の重要な結果を紹介しましょう:

定理 4.5. [**相補性定理**]
主問題と双対問題それぞれの実行可能解 $\mathbf{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1,\ \ldots,\ y_m)$ が最適解であるための必要十分条件は，次の**相補スラック性条件** (complimentary slackness) が成り立つことである:

- 各 $j = 1,\ \ldots,\ n$ について

$$x_j = 0 \ \text{ または }\ a_{1j}y_1 + \cdots + a_{mj}y_m = c_j,$$

- 各 $i = 1,\ \ldots,\ m$ について

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \ \text{ または }\ y_i = 0.$$

証明:　主問題と双対問題の実行可能解をそれぞれ $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ としよう．双対定理から，$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ が最適解であるための必要十分条件は両者の目的関数値が一致すること:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{4.10}$$

である．一方，

$$\begin{array}{rcrcll} x_{n+i} & = & b_i & - & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, & i = 1,\ \ldots,\ m \\ y_{m+j} & = & -c_j & + & \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i, & j = 1,\ \ldots,\ n \end{array}$$

とおけば，

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ = \ & \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - y_{m+j} \right) x_j - \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} \right) y_i \\ = \ & -\sum_{j=1}^{n} y_{m+j} x_j - \sum_{i=1}^{n} x_{n+i} y_i \end{aligned} \tag{4.11}$$

となる．(4.10) が成り立つための必要十分条件は，(4.11) の右辺がゼロとなることである．ところが，$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ の実行可能性から x_j, y_i, x_{n+i}, y_{m+j} はすべての非負なので，この条件は，

- 各 j について $x_j = 0$ または $y_{m+j} = 0$,
- 各 i について $x_{n+i} = 0$ または $y_i = 0$

と等価であり，これは相補スラック性条件に他ならない．■

以上の結果をまとめると次の表のようになります．ここで，○は起こりうる，×は起こりえないことを示します．

		双対問題		
		最適解が存在	実行不可能	非有界
主問題	最適解が存在	○	×	×
	実行不可能	×	○	○
	非有界	×	○	×

宿題

4.1 定理 4.1，系 4.2，および 4.2 を証明せよ．

4.2 次の各問題の双対問題を書き，与えられた解の最適性を調べよ:

(a)
$$\left|\begin{array}{lrrrrrrrrrr} \text{最大化} & -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & & \\ \text{条　件} & 3x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & \le & 4 \\ & -x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & \le & -2 \\ & -2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & & & \le & -3 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & & & - & 3x_4 & \le & 2 \\ & & & & & & x_1,\ x_2,\ x_3, & x_4 & \ge & 0 \end{array}\right.$$

$\mathbf{x} = (3\,/\,2,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1\,/\,2),\quad \mathbf{y} = (1,\ \ 0,\ \ 2,\ \ 0).$

(b)
$$\left|\begin{array}{lrrrrrrrrrrr} \text{最大化} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & & \\ \text{条　件} & 13x_1 & + & 16x_2 & + & 17x_3 & + & 15x_4 & + & 2x_5 & \le & 8 \\ & 13x_1 & + & 10x_2 & + & 9x_3 & + & 17x_4 & + & 5x_5 & \le & 7 \\ & 14x_1 & + & 2x_2 & + & 5x+3 & + & 8x_4 & + & 4x_5 & \le & 1 \\ & & & & & & x_1,\ x_2,\ x_3, & x_4, & & x_5 & \ge & 0 \end{array}\right.$$

$\mathbf{x} = (0,\ \ 1\,/\,2,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0),\quad \mathbf{y} = (0,\ \ 1\,/\,30,\ \ 4\,/\,15).$

4.3 LP とその最適解が以下のように与えられている．相補性定理を使って双対問題の最適解を求めよ:

$$\left|\begin{array}{lrrrrr} \text{最大化} & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{条　件} & 2x_1 & + & 4x_2 & \le & 1 \\ & -5x_1 & + & 2x_2 & \le & 0 \\ & -3x_1 & - & 3x_2 & \le & 0 \\ & 5x_1 & - & 5x_2 & \le & 0 \\ & -5x_1 & - & 3x_2 & \le & 0 \\ & 2x_1 & - & 8x_2 & \le & 0 \\ & & x_1, & x_2 & \ge & 0, \end{array}\right. \qquad \mathbf{x} = (1\,/\,6,\ \ 1\,/\,6).$$

4.3 辞書の双対性

次に主問題と双対問題それぞれの辞書の間にどのような関連があるのか調べてみましょう．証明を後回しにした LP の双対定理は，この関連から導くことができます．

例 4.2. 主問題:

$$\left|\begin{array}{lrcrcr} \text{最大化} & 15x_1 & + & 20x_2 & & \\ \text{条　件} & 4x_1 & + & 6x_2 & \le & 240 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \le & 90 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \le & 100 \\ & & & x_1,\ x_2 & \ge & 0, \end{array}\right. \tag{4.12}$$

双対問題:

$$\left|\begin{array}{lrcrcrcr} \text{最小化} & 240y_1 & + & 90y_2 & + & 100y_3 & & \\ & 4y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & \ge & 15 \\ & 6y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & \ge & 20 \\ & & & & y_1,\ y_2,\ & y_3 & \ge & 0. \end{array}\right. \tag{4.13}$$

すでに述べたように，双対問題 (4.13) は単純な変換で基準形の問題:

$$\left|\begin{array}{lcrcrcrcr} \text{最大化} & - & 240y_1 & - & 90y_2 & - & 100y_3 & & \\ & - & 4y_1 & - & 2y_2 & - & y_3 & \le & -15 \\ & - & 6y_1 & - & y_2 & - & 2y_3 & \le & -20 \\ & & & & & y_1,\ y_2,\ & y_3 & \ge & 0. \end{array}\right. \tag{4.14}$$

に書き換えられます．主問題，双対問題それぞれにスラック変数 $(x_3,\ x_4,\ x_5)$, $(y_4,\ y_5)$ を導入して次のような辞書を定義します:

$$\left|\begin{array}{lcrcrcr} x_3 & = & 240 & - & 4x_1 & - & 6x_2 \\ x_4 & = & 90 & - & 2x_1 & - & x_2 \\ x_5 & = & 100 & - & x_1 & - & 2x_2 \\ z & = & 0 & + & 15x_1 & + & 20x_2, \end{array}\right. \tag{4.15}$$

$$
\left|
\begin{array}{rcrcrcrcr}
y_4 & = & -15 & + & 4y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 \\
y_5 & = & -20 & + & 6y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 \\
w & = & 0 & - & 240y_1 & - & 90y_2 & - & 100y_3.
\end{array}
\right. \tag{4.16}
$$

双対問題の変数 y_1, y_2, y_3 は主問題の 3 本の制約式に対応していますので，主問題のスラック変数 x_3, x_4, x_5 とは 1 対 1 に対応していることがわかります．また同様に，主問題の変数 x_1, x_2 は双対問題のスラック変数 y_4, y_5 に 1 対 1 に対応しています．つまり，

$$
\left.
\begin{array}{lcll}
x_j & \longleftrightarrow & y_{m+j}, & j = 1, \ldots, n \\
x_{n+i} & \longleftrightarrow & y_i, & i = 1, \ldots, m
\end{array}
\right\} \tag{4.17}
$$

の対応があるわけです．さらに，

$$
\left.
\begin{array}{lcl}
x_j \text{ が } (k \text{ 番目の}) \text{ 基底変数} & \longrightarrow & \text{対応する } y_i \text{ は } (k \text{ 番目の}) \text{ 非基底変数} \\
x_j \text{ が } (k \text{ 番目の}) \text{ 非基底変数} & \longrightarrow & \text{対応する } y_i \text{ は } (k \text{ 番目の}) \text{ 基底変数}
\end{array}
\right\} \tag{4.18}
$$

となっていることにも注意してください．

辞書 (4.15) と (4.16) の係数を比べてみましょう．係数だけを使って行列表現すると，２つの辞書はそれぞれ

$$
\begin{array}{c|r|rr|}
 & & x_1 & x_2 \\
\cline{2-4}
x_3 & 240 & -4 & -6 \\
x_4 & 90 & -2 & -1 \\
x_5 & 100 & -1 & -2 \\
\cline{2-4}
z & 0 & 15 & 20 \\
\cline{2-4}
\end{array} \tag{4.19}
$$

$$
\begin{array}{c|r|rrr|}
 & & y_1 & y_2 & y_3 \\
\cline{2-5}
y_4 & -15 & 4 & 2 & 1 \\
y_5 & -20 & 6 & 1 & 2 \\
\cline{2-5}
w & 0 & -240 & -90 & -100 \\
\cline{2-5}
\end{array} \tag{4.20}
$$

と表せます．これから明らかなように係数の対応は，

$$
\begin{array}{c}
\text{主問題:} \\
\begin{array}{|c|c|}
\hline
\mathbf{b} & \mathbf{A} \\
\hline
\mathbf{c}_0 & \mathbf{c} \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\text{双対問題:} \\
\begin{array}{|c|c|}
\hline
-\mathbf{c}^\top & -\mathbf{A}^\top \\
\hline
-\mathbf{c}_0^\top & -\mathbf{b}^\top \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\tag{4.21}
$$

となっています．ただし，ここで $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, c_0 はそれぞれ $m \times n$, $m \times 1$, $1 \times n$, 1×1 の行列を表します．

以上の (4.17), (4.18), (4.21) から主問題と双対問題の初期辞書の対応関係が確かめられました．この関係を使えば，主問題の初期辞書から双対問題の初期辞書を構成することも簡単にできるうえ，その逆も可能です．

今度は，ピボット演算と主・双対辞書の対応を調べてみましょう．例えば，辞書 (4.19) で，(1, 2) を中心としてピボット演算を行えば次の辞書がえられます:

$$
\begin{array}{c|r|rr|}
 & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{x_1} & \multicolumn{1}{c}{x_3} \\
\cline{2-4}
x_2 & 40 & -2/3 & -1/6 \\
x_4 & 50 & -4/3 & 1/6 \\
x_5 & 20 & 1/3 & 1/3 \\
\cline{2-4}
z & 800 & 5/3 & -10/3 \\
\cline{2-4}
\end{array}
\tag{4.22}
$$

一方，双対辞書 (4.20) で，これに対応する位置 (2, 1) を中心にピボット演算すると

$$
\begin{array}{c|r|rrr|}
 & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{y_5} & \multicolumn{1}{c}{y_2} & \multicolumn{1}{c}{y_3} \\
\cline{2-5}
y_4 & -5/3 & 2/3 & 4/3 & -1/3 \\
y_1 & 10/3 & 1/6 & -1/6 & -1/3 \\
\cline{2-5}
w & -800 & -40 & -50 & -20 \\
\cline{2-5}
\end{array}
\tag{4.23}
$$

がえられます．この 2 つの辞書を見比べてみてください．初期辞書で成り立っていた対応関係 (4.17), (4.18), (4.21) が，ピボット演算ののちの辞書の組 (4.22), (4.23) でも満たされています．このことから，一般に次のことを予想できます:

補題 4.6. [**辞書の双対性**]
主問題の辞書に対し，条件 (4.17), (4.18), (4.21) によって定まる双対問題の辞書が存在する．

■

ここでは補題の証明を省きますが，対応する主および双対辞書に対し，対称的な ピボット演算，つまり $(r,\ s)$ と $(s,\ r)$ を中心とするピボット演算が再び対応する辞書を生成することを示せば十分です．

辞書の双対性から直ちに導かれる重要な結果は，

- 主問題の辞書の最適性と対応する双対辞書の最適性が一致する

ことです．つまり (4.21) で主問題の最適性は，$\mathbf{b}$ の各成分が非負で $\mathbf{c}$ の各成分が非正であることですが，このことは対応する双対辞書が最適であること — つまり，$-\mathbf{b}^{\mathsf{T}}$ の各成分が非正で $-\mathbf{c}^{\mathsf{T}}$ の各成分が非負であること — に他なりません．

例を使って実際に確かめてみましょう．辞書 (4.22) に，(2, 1) を中心とするピボット演算を施すと

$$
\begin{array}{c|c|cc|}
 & & x_4 & x_3 \\
\hline
x_2 & 15 & 1/2 & -1/4 \\
x_1 & 75/2 & -3/4 & 1/8 \\
x_5 & 65/2 & -1/4 & 3/8 \\
\hline
z & 1725/2 & -5/4 & -25/8 \\
\hline
\end{array}
\tag{4.24}
$$

一方，双対辞書 (4.23) で，これに対応する位置 (1, 2) を中心にピボット演算すると

$$
\begin{array}{c|c|ccc|}
 & & y_5 & y_4 & y_3 \\
\hline
y_2 & 5/4 & -1/2 & 3/4 & 1/4 \\
y_1 & 25/8 & 1/4 & -1/8 & -3/8 \\
\hline
w & -1725/2 & -15 & -75/2 & -65/2 \\
\hline
\end{array}
\tag{4.25}
$$

となります．辞書 (4.25) は (4.24) に対応する双対辞書で，辞書 (4.24) の最適性は (4.25) の最適性も意味します．そして，実際，主問題の最適辞書 (4.24) には主問題の最適解の情報ばかり

でなく，双対問題の最適解の情報も含まれています．つまり，最適辞書 (4.24) の目的関数行:

$$z \;= 1725\,/\,2 \;-\; 5\,/\,4x_4 \;-\; 25\,/\,8x_3$$

で，各非基底変数 x_4, x_3 の係数に -1 を掛けたものが対応する双対 (基底) 変数 y_2, y_1 の (最適解における) 値となっています．もちろん，これ以外の双対変数 y_5, y_4, y_3 は非基底変数であり，その値はゼロです．

4.4 双対定理の証明

それでは，双対定理 (定理 4.4) を証明しましょう．双対問題の双対が主問題になることから，主問題に最適解が存在するときだけを考えれば十分です．

証明: 主問題に最適解が存在する場合，２段階シンプレックス法使うことによって最適な辞書 (D) がえられる．一方，補題 4.6 より，双対問題には (D) に対応する最適な辞書 (D*) が存在する．したがって，双対問題にも最適解が存在する．辞書 (D) と (D*) の関係 (4.21) から，明らかに両者の最適解における目的関数値は一致する (２つの辞書の目的関数値は符号が反転していますが，これは双対問題を基準形に書き換えたためです)． ■

ついでに，主問題の最適辞書 (D) から双対問題の最適解を求める方法を一般的に説明しておきましょう．辞書 (D) の目的関数行が

$$z \;=\; c_0 \;+\; c_1x_{N(1)} \;+\; c_2x_{N(2)} \;+\cdots+\; c_nx_{N(n)}$$

であったとします．(D) の最適性から c_j はすべて非正です．変数の対応 (4.17) から，双対問題の最適解の値 $(y_1^*,\ \ldots,\ y_m^*)$ は

$$y_i^* = \begin{cases} -c_j, & i = N(j) - n \text{ の場合} \\ \quad 0, & \text{それ以外} \end{cases} \tag{4.26}$$

によって定めることができます．

4.5 主問題と双対問題どちらを解くべきか

LP は，与えられた問題を直接シンプレックス法で解く代わりに，その双対問題にシンプレックス法を適用しても解けることがわかりました．効率的に LP を解こうとするとき，主問題と双対問題のどちらを解く方が簡単かを事前に判別できれば便利です．この判別を理論的に結論づけることは困難ですが，経験的にはシンプレックス法の総ピボット回数は基底変数の数 m に強く依存し，非基底変数の数 n にはあまり影響を受けないことが知られています．つまり，m が n に比べて小さいときには主問題を解き，その逆の場合は双対問題を解くのが有利であると予想されます．

主問題と双対問題のどちらを解くべきかを判別する基準は，m, n の大小関係だけによるものではありません．例えば，主問題の初期辞書が実行可能でなく，双対問題の初期辞書が実行可能である場合を考えてみてください．主問題を解くためには 2 段階シンプレックス法の第 1 段階から始める必要がありますが，双対問題では第 1 段階を省くことができます．このことから推測されるように，主問題・双対問題の何れかが自明な初期辞書をもてば，m, n の大きさに大きな違いがないかぎり，その実行可能辞書をもつ問題を解く方が有利といえます．

宿題

4.4 次の各最適辞書から双対問題の最適解を求めよ:

$$
\text{(a)} \quad
\begin{array}{|rcrcrcrcr}
x_5 & = & 0.14 & + & 0.22x_4 & + & 0.76x_8 & - & 0.89x_1 \\
x_3 & = & 1.25 & & & - & 0.13x_8 & - & 1.00x_1 \\
x_6 & = & 1.11 & + & 0.78x_4 & + & 0.11x_8 & + & 4.89x_1 \\
x_7 & = & 6.94 & + & 0.11x_4 & + & 0.19x_8 & - & 2.44x_1 \\
x_2 & = & 0.56 & - & 0.11x_4 & + & 0.06x_8 & - & 0.56x_1 \\
x_9 & = & 9.44 & + & 0.11x_4 & - & 0.06x_8 & - & 6.44x_1 \\
z & = & 1.81 & - & 0.11x_4 & - & 0.07x_8 & - & 0.56x_1.
\end{array}
$$

(b)
$$\left|\begin{array}{lclclclclcl}
x_3 & = & 2.50 & - & 0.25x_5 & - & 2.25x_2 & - & 2.25x_1 & - & 2.25x_4 \\
x_6 & = & 2.25 & + & 0.75x_5 & - & 0.25x_2 & + & 4.75x_1 & - & 0.25x_4 \\
x_7 & = & 7.50 & + & 0.25x_5 & - & 2.75x_2 & - & 1.75x_1 & + & 0.25x_4 \\
z & = & 2.50 & - & 0.25x_5 & - & 1.25x_2 & - & 1.25x_1 & - & 1.25x_4.
\end{array}\right.$$

4.5 LP が次のような辞書をもつとき，双対辞書は実行不可能であることを証明せよ．(注意: 辞書の実行可能性は仮定しない．)

$$\begin{array}{c}
\exists j \text{ 列} \\
\begin{array}{|c|c|}
\hline
 & \oplus \\
 & \vdots \\
 & \oplus \\
\hline
 & + \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\oplus: & \text{非負の成分} \\
+: & \text{正の成分.}
\end{array}$$

4.6 基準形の LP:

$$\left|\begin{array}{llll}
\text{最大化} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\
\text{条　件} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq & b_i, & i = 1, \ldots, m \\
 & \qquad x_j \geq & 0, & j = 1, \ldots, n
\end{array}\right.$$

の最適目的関数値を z^*，双対問題の最適解を $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*$ とする．このとき任意の値 $t_1, t_2, \ldots, t_m$ と，LP:

$$\left|\begin{array}{llll}
\text{最大化} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\
\text{条　件} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq & b_i + t_i, & i = 1, \ldots, m \\
 & \qquad x_j \geq & 0, & j = 1, \ldots, n
\end{array}\right.$$

の実行可能解 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して次の関係が成り立つことを示せ:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq z^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* t_i.$$