2 シンプレックス法の基本アイディア

ここでは簡単な線形計画問題の例を取り上げ，LP を解くためのアルゴリズム– **シンプレックス (単体) 法** (simplex method) の基本的なアイディアを説明しましょう．

2.1 基準型の問題

シンプレックス法の仕組みを理解するため，これから解く LP を基準型とよばれる扱いやすい形のものに限定します．

基準型 (canonical form) の線形計画問題とは，次のような形で表現される LP をさします:

$$
\left|\begin{array}{lcccccccl}
\text{最大化} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & +\cdots+ & c_nx_n & & & \\
\text{条　件} & a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & +\cdots+ & a_{in}x_n & \leq & b_i, & i=1,\ldots,m \\
& & & \multicolumn{6}{l}{x_1\geq 0,\ \ x_2\geq 0,\ \ \ldots\ \ x_n\geq 0}
\end{array}\right.
$$

この問題は一般の LP に比べて次の点で制限されています：

- 最大化問題である
- すべての変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に非負制約がある
- 非負制約以外はすべて「$\leq$」向きの不等式制約条件で，等式制約条件を含まない．

例えば，例 1.2 の問題 (1.10)：

$$
\left|\begin{array}{lrrrrrrrr}
\text{最大化} & & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{条　件} & & 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 6 \\
& & 2x_1 & & & + & 4x_3 & \leq & 4 \\
& - & 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \leq & 1 \\
& & \multicolumn{7}{l}{x_1\geq 0,\quad x_2\geq 0,\quad x_3\geq 0}
\end{array}\right. \tag{2.1}
$$

は基準型の問題ですが，問題 (1.9) や (1.11) は基準型になっていません．しかし，一般の線形計画問題でも，

同値変形: $a_{i1} + \cdots + a_{in}x_n = b_i \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n & \le & b_i \\ -a_{i1}x_1 - \cdots - a_{in}x_n & \le & -b_i \end{cases}$

変数変換: x_j に非負制約なし $\quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_j = x'_j - x''_j \\ x'_j \ge 0,\ x''_j \ge 0 \end{cases}$

符号の逆転: $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \ge b_i \quad \Longrightarrow \quad -a_{i1}x_1 - \cdots - a_{in}x_n \le -b_i$

最小化 $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \quad \Longrightarrow \quad$ 最大化 $- c_1x_1 - \cdots - c_nx_n$

などを行えば，簡単に基準型の問題に変換することができます．したがって，理論上は基準型の問題だけを扱えば十分です．ただし，上のような変換を安易に行うと問題のサイズが不必要に大きくなり，計算上の非効率を招くこともあります．一般の問題の適切な変換についてはあとで説明することにします．

2.2 シンプレックス法による解法例

それではシンプレックス法で実際に基準型の LP，問題 (2.1) を解いてみましょう．

前処理　まず，制約式の左辺を移行して以下のように問題を書き換えます：

$$
\left|\begin{array}{lcccccccccc}
\text{最大化} & & & & & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 \\
\text{条　件} & 0 & \le & 6 & - & 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 \\
 & 0 & \le & 4 & - & 2x_1 & & & - & 4x_3 \\
 & 0 & \le & 1 & + & 4x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 \\
 & & & & & & & x_1,\ x_2,\ x_3 & \ge & 0
\end{array}\right.
$$

さらに目的関数を

$$z = 2x_1 + x_2 + x_3$$

とおき，**スラック変数**とよばれる変数 $x_4,\, x_5,\, x_6$ を導入して LP：

$$
\left|
\begin{array}{llcrcrcrcr}
\text{最大化} & z \\
\text{条　件} & x_4 & = & 6 & - & 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 \\
 & x_5 & = & 4 & - & 2x_1 & & & - & 4x_3 \\
 & x_6 & = & 1 & + & 4x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 \\
 & z & = & 0 & + & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 \\
 & \multicolumn{9}{l}{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6\ \geq\ 0}
\end{array}
\right. \tag{2.2}
$$

を作ります．ここで，２つの問題 (2.1) と (2.2) は次の意味で同値であることに注意してください：

- 問題 (2.1) の実行可能解 $(x_1',\ x_2',\ x_3')$ を (2.2) の等式に代入して残りの変数の値 $x_4',\, x_5',\, x_6',\, z'$ を定めれば，$(x_1',\ x_2',\ x_3',\ x_4',\ x_5',\ x_6',\ z')$ は問題 (2.2) の実行可能解となり，対応する目的関数値は一致する，逆に
- 問題 (2.2) の実行可能解 $(x_1'',\ x_2'',\ x_3'',\ x_4'',\ x_5'',\ x_6'',\ z'')$ に対し，変数 $x_4,\, x_5,\, x_6$ の値を無視することで問題 (2.1) の実行可能解 $(x_1'',\ x_2'',\ x_3'')$ が得られ，対応する目的関数値は一致する．

つまり，(2.1) を解くことと (2.2) を解くことは実質的に同じであるわけです．

さて，問題 (2.2) の等式制約を見てみましょう．等式の左辺の変数は各等式ごとにすべて異なり，それぞれ右辺の変数 $x_1,\, x_2,\, x_3$ の線形関数として表現されています．あとで一般的に定義しますが，左辺に現れる変数を**基底変数**，右辺に現れる変数を**非基底変数**とよびます．非基底変数 $x_1,\, x_2,\, x_3$ の値を任意に定めると，すべての等式を満足させるように残りの変数，つまり基底変数 $x_4,\, x_5,\, x_6,\, z$ の値が一意に定まります．右辺の変数をすべてゼロに固定して得られる解：

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ z) = (0,\ 0,\ 0,\ 6,\ 4,\ 1,\ 0) \tag{2.3}$$

を特に**基底解**とよびます．この例では，基底解における $x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5,\, x_6$ の値はすべて非負なので，基底解 (2.3) は実行可能解でもあり，その目的関数値 z はゼロです．

解の改善　実行可能基底解 (2.3) から出発し，目的関数の値が増加するように解の改善を試みます．基底変数 x_1, x_2, x_3 をすべてゼロに固定して基底解 (2.3) を得ましたが，変数 x_1 の値だけをゼロから t まで増加させてみましょう．すると，基底変数の値は等式：

$$\left|\begin{array}{lcccc} x_4 & = & 6 & - & 2t \\ x_5 & = & 4 & - & 2t \\ x_6 & = & 1 & + & 4t \\ z & = & 0 & + & 2t \end{array}\right.$$

によって定まることになります．例えば，

$$\begin{array}{llllll} t=1\text{のとき:} & x_4=4, & x_5=2, & x_6=5, & z=2 & \longrightarrow\ \text{実行可能} \\ t=2\text{のとき:} & x_4=2, & x_5=0, & x_6=9, & z=4 & \longrightarrow\ \text{実行可能} \\ t=3\text{のとき:} & x_4=0, & x_5=-2, & x_6=13, & z=6 & \longrightarrow\ \text{実行不可能} \end{array}$$

このことから，変数 x_1 の値 t を増加させるほど目的関数 z の値も増加することがわかります．これは，z を含む等式で変数 x_1 の係数 $(=2)$ が正であるためです．一方，基底変数に対する非負制約を保つためには，２番目の等式によって x_1 の値 t は 2 を越えることができません．したがって，

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ z) = (2,\ 0,\ 0,\ 2,\ 0,\ 9,\ 4) \tag{2.4}$$

が x_1 だけを増加させて得られる最もよい実行可能解となります．

新しい実行可能解 (2.4) では $x_1 > 0,\ x_5 = 0$ となっていて，最初の実行可能解 (2.3) と比較すると変数 x_1 と x_5 の立場が入れ替わっています．そこで (2.2) の等式：

$$x_5 \ = \ 4 \ - \ 2x_1 \qquad\qquad - \ 4x_3$$

を変数 x_1 について解き，残りの等式に代入します．その結果，新たな等式制約条件：

$$\left|\begin{array}{lcccrcrcr} x_4 & = & 2 & + & x_5 & - & 2x_2 & + & 5x_3 \\ x_1 & = & 2 & - & 1/2x_5 & & & - & 2x_3 \\ x_6 & = & 9 & - & 2x_5 & - & 3x_2 & - & 7x_3 \\ z & = & 4 & - & x_5 & + & x_2 & - & 3x_3 \end{array}\right. \tag{2.5}$$

が得られます．明らかに (2.5) は問題 (2.2) の等式条件と同値です．つまり，いま行った変形で，基底変数の集合が要素一つだけ異なる同値な LP を生成したことになります．そして実行可能解 (2.4) は新しい問題の基底解となることもわかります．シンプレックス法は，以上のように

「問題の等式制約条件を同値変形しながら，対応する基底解を単調に改善していく」

方法です．

式 (2.5) にもう一度シンプレックス法を適用してみましょう．目的関数 z の等式から分かるように現在の非基底変数 x_5, x_2, x_3 のうち，その増加によって z の値が増加するのは x_2 だけです．そして基底変数の非負性を保つためには，変数 x_2 の値は $2\,/\,2 = 1$ を越えられません．このとき，変数 x_4 の値がゼロとなって新しい実行可能解は

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ z) = (2,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 6,\ 5) \tag{2.6}$$

となります．また変数 x_2 と x_4 の立場が入れ替わり，新しい等式制約条件が次のように与えられます：

$$\left|\begin{array}{rcrcrcrcr} x_2 & = & 1 & + & 1/2x_5 & - & 1/2x_4 & + & 5/2x_3 \\ x_1 & = & 2 & - & 1/2x_5 & & & - & 2x_3 \\ x_6 & = & 6 & - & 7/2x_5 & - & 3/2x_4 & - & 29/2x_3 \\ z & = & 5 & - & 1/2x_5 & - & 1/2x_4 & - & 1/2x_3 \end{array}\right. \tag{2.7}$$

この時点で増加すべき非基底変数がなくなり，シンプレックス法は終了します．実際，最後に得られた実行可能解は最適解であることが保証されます (宿題 3.2)．

この数値例から，与えられた線形計画問題がある特別な形，つまり

- 基準型である
- 右辺の定数 b_i がすべて非負である

となっていれば，自明な実行可能解から出発して解を単調に改善していく方法のあることが推測できます．次の節では，この方法をアルゴリズムとして一般的に記述します．

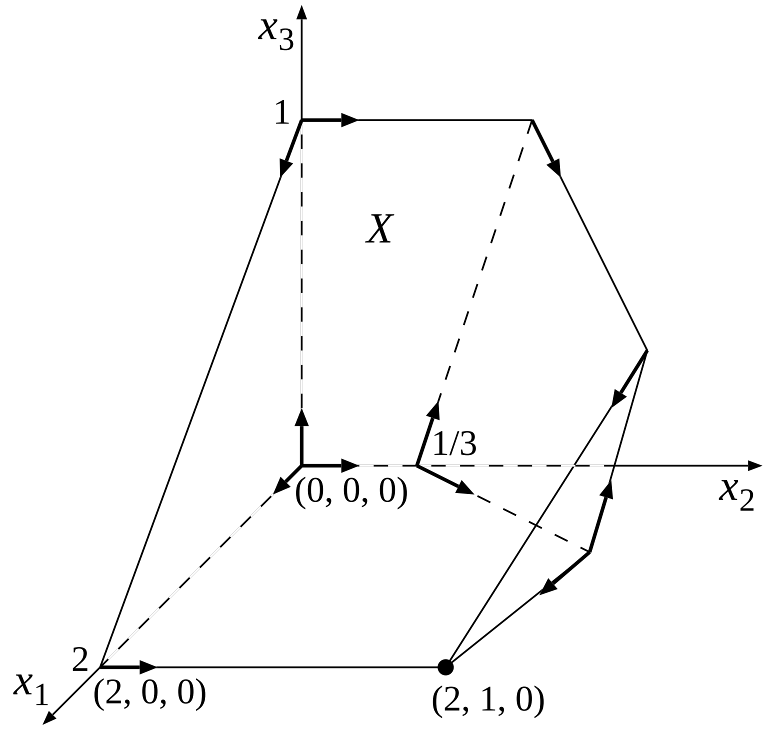

図 2.1: 問題 (2.1) の実行可能領域 X とシンプレックス法の振るまい

2.3　シンプレックス法の幾何的な振るまい

先に進む前に，例 1.1 の朝食問題で行ったように問題 (2.1) の実行可能領域を x_1–x_2–x_3 空間上に図示してみましょう．基準型 LP の実行可能領域は，一般に図 2.1 が示すような $m+n$ 個の n 次元超平面 ($n=2$ ならば直線，$n=3$ ならば普通の平面) によって囲まれた**凸多面体** (polyhedron) となります．n 個の超平面の共通部分を凸多面体の**端点** (vertex) とよびますが，LP の最適解はその中の 1 つで達成されます．この凸多面体上でシンプレックス法は，目的関数のより大きな，隣接する端点を次々と巡り，最大の目的関数値を与える端点を探索します．

宿題

2.1　例 1.2 の問題 (1.11) を基準型の LP に変換せよ．

2.4 自明な実行可能解をもつ LP に対して

基準型の線形計画問題：

$$
\left|\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{最大化} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & +\cdots+ & c_nx_n & & \\
\text{条　件} & a_{11}x_1 & + & c_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
 & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 & + & c_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & \leq & b_m \\
 & & & & x_1,\ x_2,\ ,\ldots, & x_n & \geq & 0
\end{array}\right. \tag{2.8}
$$

が与えられているものとしましょう．問題 (2.1) と同様に

$$
b_i \geq 0, \quad i = 1,\ \ldots,\ m \tag{2.9}
$$

が成り立っているものとします．

問題 (2.1) を (2.2) に変換したように，問題 (2.8) を次のように書き換えます：

$$
\left|\begin{array}{llcrcrcrcr}
\text{最大化} & z & & & & & & & & \\
\text{条　件} & x_{n+1} & = & b_1 & - & a_{11}x_1 & - & a_{12}x_2 & -\cdots- & a_{1n}x_n \\
 & \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots \\
 & x_{n+m} & = & b_m & - & a_{m1}x_1 & - & a_{m2}x_2 & -\cdots- & a_{mn}x_n \\
 & z & = & c_0 & + & c_1x_1 & + & c_2x_2 & +\cdots+ & c_mx_n \\
 & & & & & & & x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n & \geq & 0.
\end{array}\right. \tag{2.10}
$$

この段階では $c_0 = 0$ です．ここで導入された変数 x_{n+i} $(i = 1,\ \ldots,\ m)$ は**スラック変数** (slack variable) とよばれています．問題 (2.8) と (2.10) の間には，目的関数の値を保存するような実行可能解の 1 対 1 対応があり，同値な問題と考えることができます．そこで，今後 (2.10) のような形の問題も**基準型**の問題とよぶことにします．

さて，変数の添字 $1, \ldots, n+m$ を

$$
\begin{array}{llll}
N(1) = 1, & N(2) = 2, & \ldots, & N(n) = n \\
B(1) = n+1, & B(2) = n+2, & \ldots, & B(m) = n+m
\end{array}
$$

とおき，問題 (2.10) の等式制約を

$$
\begin{array}{llclclclcl}
(\mathrm{E}_1): & x_{B(1)} & = & b_1 & - & a_{11}x_{N(1)} & - & a_{12}x_{N(2)} & - \cdots - & a_{1n}x_{N(n)} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots \\
(\mathrm{E}_m): & x_{B(m)} & = & b_m & - & a_{m1}x_{N(1)} & - & a_{m2}x_{N(2)} & - \cdots - & a_{mn}x_{N(n)} \\
(\mathrm{E}_{m+1}): & z & = & c_0 & + & c_1x_{N(1)} & + & c_2x_{N(2)} & + \cdots + & c_mx_{N(n)}
\end{array}
\tag{2.11}
$$

と表すことにします．この等式系を線形計画問題 (2.8) の**辞書** (dictionary) とよびます．左辺の $m+1$ 個の変数 $x_{B(i)}$, z を**基底変数** (basic variable) といい，右辺の n 個の変数 $x_{N(j)}$ を**非基底変数** (nonbasic variable) といいます．ここで注目して欲しい点は，非基底変数の値を固定すると (2.11) を満足する解が一意に定まることです．非基底変数をすべてゼロに固定して得られる解：

$$x_{N(1)} = x_{N(2)} = \ \dots\ = x_{N(n)} = 0$$

$$x_{B(1)} = b_1, \quad x_{B(2)} = b_2, \quad \dots, \quad x_{B(m)} = b_m, \quad z = c_0$$

を特に**基底解** (basic solution) とよびます．この基底解が実行可能であるとき，辞書 (2.11) を**実行可能**な辞書 (feasible dictionary) といいます．いまの場合，(2.9) で問題 (2.8) の右辺 b_i がすべて非負であることを仮定していますので，(2.8) から (2.11) への変換によって直ちに実行可能な辞書の得られることがわかります．

前節までに示したように，シンプレックス法は辞書を同値な別の辞書 (等式系) に変換する操作を繰り返します．その手続きを一般に定義しましょう．ゼロでない係数 a_{rs} ($1 \le r \le m$, $1 \le s \le n$) に対し，以下の手続きにしたがって新しい等式系 (辞書) をえる操作を $(r,\ s)$ **を中心とするピボット演算**, または**枢軸演算** (pivoting operation) とよびます：

procedure **ピボット** $(r,\ s)$

begin

　等式 (E_r) を変数 $x_{N(s)}$ について解き，得られた等式を新たに (E_r) とおく;

　for それぞれの $i \neq r$ do

　　新しい等式 (E_r) を使って等式 (E_i) の右辺から変数 $x_{N(s)}$ を消去し，得られた等式を新たに (E_i) とする;

添字 $B(r)$ と $N(s)$ を入れ替える，つまり

$$\mathrm{tmp} := B(r);\ \ B(r) := N(s);\ \ N(s) := \mathrm{tmp}$$

end;

この procedure ピボットを手続きに用いれば，問題 (2.8) のように

- 基準型である，
- 右辺の定数 b_i がすべて非負である

場合はもちろん，実行可能な辞書さえ得られていれば任意の LP に対して，これを解くアルゴリズム，シンプレックス法を次のように記述できます：

algorithm **シンプレックス**

入力: 実行可能辞書 (2.11)，ただし

$$N(1) = 1,\ \ldots,\ N(n) = n,\ B(1) = n+1,\ \ldots,\ B(m) = n+m.$$

begin

  $stop := false$;

  while $stop = false$ do begin { ステップ 1: 最適性判定 }

    if すべての j に対して $c_j \le 0$ then

      $stop := true$ { 現在の基底解が最適解 }

    else

    begin { ステップ 2: 非有界性判定 }

      $c_s > 0$ となる添字 s $(1 \le s \le n)$ を 1 つ選ぶ;

      if すべての i に対して $a_{is} \le 0$ then

        $stop := true$ { 入力した LP は非有界 }

      else

begin { ステップ 3: 基底解の更新 }

現在の基底解から，実行可能性を保ったまま非基底変数のうち $x_{N(s)}$ だけを可能なかぎり増加させる，つまり

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \min\left\{ \frac{b_i}{a_{is}} \;\middle|\; a_{is} > 0,\;\; i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m \right\}$$

を満たす行番号 r を 1 つ選ぶ;

procedure ピボット $(r,\ s)$ を呼んで $(r,\ s)$ を中心とするピボット演算を行い，得られた辞書を新たに (2.11) とする

end

end

end

end;

さて algorithm シンプレックスの記述から，次のことは明らかです：

性質 2.1. 実行可能辞書をもつ線形計画問題に対し，シンプレックス法が有限回で終了すれば，その LP は最適解をもつか，あるいは非有界である. ■

しかし，algorithm シンプレックスが有限回で終了する保証は，いまのところないうえ，任意の LP に対して実行可能辞書の得られる保証もありません．すでに示したように，任意の LP は基準型に書き換えることができますが，そこから直ちに実行可能な辞書をえるためには仮定 (2.9) が必要です．次の章では，実際にシンプレックス法が有限回で終了しない場合のあることを簡単な例で示し，ピボット元 $(r,\ s)$ の選び方をある規則で限定することによって有限収束が保証されることを示します．また，実行可能な辞書の得られていない LP に対して，どのような方法で実行可能辞書を生成するかについても説明します．その方法では，実は前処理で与えられた LP に対する補助問題に algorithm シンプレックスを適用します．つまり，どんな LP でも，シンプレックス法を高々 2 回用いれば解決できることを示します．

宿題

2.2 次の LP (a), (b), (c) をシンプレックス法で解け：

(a)
$$
\begin{array}{|lrcrcrcl}
\text{最大化} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & \\
\text{条　件} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 5 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 7 \\
 & & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

(b)
$$
\begin{array}{|lrcrcrcrcl}
\text{最大化} & 5x_1 & + & 6x_2 & + & 9x+3 & + & 8x_4 & & \\
\text{条　件} & x_1 & + & 2x+2 & + & 3x+3 & + & x_4 & \leq & 5 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq & 3 \\
 & & & & & x_1,\ x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0.
\end{array}
$$

(c)
$$
\begin{array}{|lrcrcl}
\text{最大化} & 2x_1 & + & x_2 & & \\
\text{条　件} & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & + & 5x_2 & \leq & 1 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & 4x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & & x_1, & x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

2.3 宿題 2.1 で求めた基準型 LP をシンプレックス法で解け．

2.4 シンプレックス法の最適性判定に関する以下の問に答えよ：

(a) 最適性判定の正当性を述べよ．

(b) 最適性判定の条件を強め，基底解が一意の最適解であるための十分条件を示せ．

2.5 シンプレックス法の非有界性判定の正当性を述べよ．