1　線形計画問題

「**線形計画法**」とはいったい何か？ まず，線形計画法が解決してくれる「**線形計画問題**」を身近な例で紹介することから始めましょう [1].

1.1　学生宿舎の朝食

例 1.1. TS 大学２年のＫ君は，学生宿舎の生活には慣れたものの，朝食を自分で作るのが億劫でならない．仕送りのわずかなＫ君にとって朝食代は，経済的にも馬鹿にならない．そこで手軽に牛乳とシリアルで済ませたいのだが，それで栄養失調にならないか不安でもある．保健管理センターに相談すると，朝食にはタンパク質，ビタミンＤ，カルシウムを少なくとも 9 グラム，1/3 RDA，1/4 RDA ずつ摂取する必要があることを教えられた（1 RDA は 1 日の必要摂取量）．調べてみると，牛乳とシリアルに含まれる「栄養」は次の表のようになっていることがわかった：

	牛乳（1/2 カップ）	シリアル（1/4 袋）
値段	50 円	65 円
タンパク質	3 グラム	2 グラム
ビタミンＤ	1/15 RDA	2/15 RDA
カルシウム	1/6 RDA	なし

シリアルに牛乳を混ぜて「びしょびしょ」になるとおいしくない．かといって牛乳が少なすぎるのも困るので，牛乳 1 カップあたりシリアル 1/6 袋から 1 袋までの範囲の量を混ぜることにする．Ｋ君は，牛乳とシリアルをどのような割合で混ぜれば，健康を損なわずに朝食代を最も少なくすることができるだろうか？ ■

Ｋ君の問題は，**メニュー計画**とか**ダイエット問題**の名前で 1960 年代前半までは結構盛んに研究されていました．牛乳とシリアルの貧しい食事だけでなく，豪華なコース料理でも，この種の問題は「線形計画問題」として定式化することができます.

朝食に食べる牛乳とシリアルの量を，それぞれ 1/2 カップ，1/4 袋を単位として x_1 と x_2 で表すことにしましょう．健康を維持するには，表から x_1, x_2 が

$$\text{タンパク質は 9 グラム以上：} \quad 3x_1 + 2x_2 \geq 9 \tag{1.1}$$

$$\text{ビタミンは 1/3 RDA 以上：} \quad \frac{1}{15}x_1 + \frac{2}{15}x_2 \geq \frac{1}{3} \tag{1.2}$$

$$\text{カルシウムは 1/4 RDA 以上：} \quad \frac{1}{6}x_1 \geq \frac{1}{4} \tag{1.3}$$

$$\text{牛乳 1 カップあたりシリアルは 1/6 袋以上：} \quad \frac{x_2}{x_1} \geq \frac{1}{3} \tag{1.4}$$

$$\text{牛乳 1 カップあたりシリアルは 1 袋以下：} \quad \frac{x_2}{x_1} \leq 2 \tag{1.5}$$

の 5 つの不等式を満足しなければならないことがわかります．また，牛乳，シリアルとも負の量を食べることはできないので，

$$x_1 \geq 0 \tag{1.6}$$

$$x_2 \geq 0 \tag{1.7}$$

も満たされなければなりません．この (1.1)–(1.7) の線形不等式系を満足する変数の組 $(x_1,\ x_2)$ が，保健管理センターの教えてくれた 1 日を「実行可能」にする（つまり，生きていくのに必要な）朝食メニューということになります．

さて，K 君の目的は朝食代を最も少なくすることです．牛乳 x_1 とシリアル x_2 の総費用は

$$z = 50x_1 + 65x_2$$

ですから，問題は

> 不等式 (1.1)–(1.7) の条件下
>
> 総費用 $z = 50x_1 + 65x_2$ を最小化する $(x_1,\ x_2)$ を求めよ

とまとめられます．

以上を整理すると，問題の定式化は

$$
\left|\begin{array}{llrcrcl}
\text{最小化} & z = & 50x_1 & + & 65x_2 & & \\
\text{条　件} & & 3x_1 & + & 2x_2 & \geq & 9 \\
& & \dfrac{1}{15}x_1 & + & \dfrac{2}{15}x_2 & \geq & \dfrac{1}{3} \\
& & \dfrac{1}{6}x_1 & & & \geq & \dfrac{1}{4} \\
& & x_1 & - & 3x_2 & \leq & 0 \\
& & 2x_1 & - & x_2 & \geq & 0 \\
& & x_1 & & & \geq & 0 \\
& & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}\right. \qquad (1.8)
$$

のように完成します．これが「線形計画問題」であり，これを解いて z の値を最小化する「実行可能」なメニュー $(x_1,\ x_2)$ さえ求まれば，K君の朝食問題は解決です．

実は，問題 (1.8) の解き方をK君は高校時代に数学の授業で習っており，朝飯前に解決することができました．不等式 (1.1)–(1.7) が満たされる領域を x_1–x_2 平面上に描けば，図 1.1 の網掛けが実行可能なメニューの集合であることがわかります．この領域上で直線 $50x_1 + 65x_2 = z$ を平行に移動させ，z の値が最小の 197.5 となる点 (2.0, 1.5) こそK君の求める「最適な」朝食の量です．その日からK君の朝食は，197 円 50 銭の牛乳 1 カップ，シリアル 3 / 8 袋となりました．しかし，メニューに目玉焼きやサラダを加えたらどうなるでしょうか？ 料理の量を示す変数も 4 つに増え，もはや「実行可能メニュー」を図示できなくなります．

K君の問題はもちろん線形計画問題の 1 例に過ぎず，同様の**数理計画問題**

— 複数の等式・不等式系によって与えられた条件の下で，目的とする関数の値を最小化（あるいは最大化）する —

は工学はもとより，経営・経済などのあらゆる分野に現れます．実際，アメリカのデルタ航空が，全米 166 都市を結ぶ航空路線に配備される約 400 機の航空機と，7,000 人の乗務員に関する 1 週間のスケジューリングを定式化したところ，変数の数が 1,700 万，条件を与える等式・不等式の数が 800 本の超大型の線形計画問題に帰着されたとの報告もあります [2]．しか

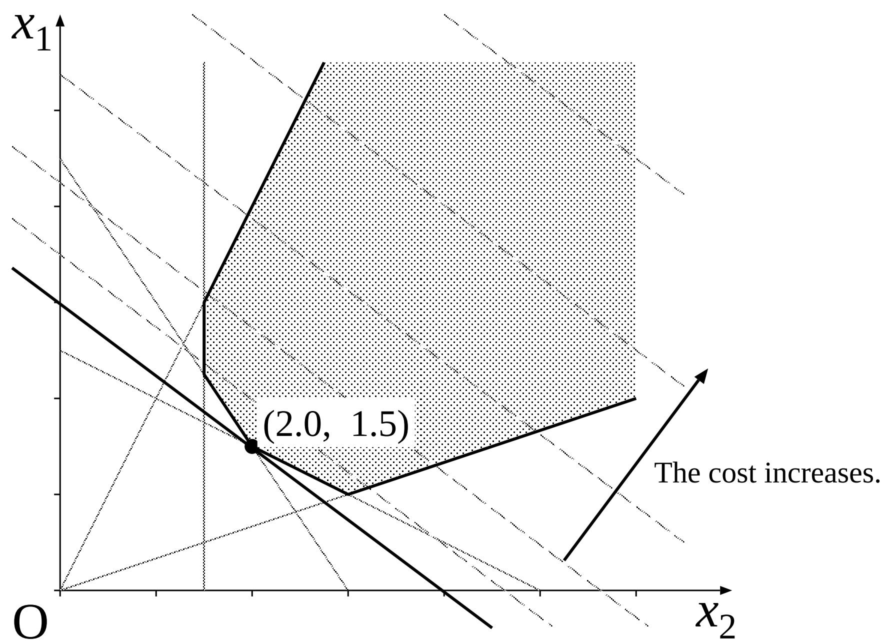

図 1.1: 実行可能メニューと最適な朝食

し，その問題を解いたことでデルタ航空では年間 1,000 万ドル以上（！）の経費削減に成功しています．

それでは，一般に線形計画問題がどんな性質をもつか，どうすれば多くの変数や条件式をもつ線形問題を解決できるか，それに答える「線形計画法」について，これから詳しく説明していきましょう．

参考文献

[1] C. Rorres and H. Anton (訳: 山下), やさしい線形代数の応用, 現代数学社 (1980).

[2] 今野　浩, カーマーカー特許とソフトウェア — 数学は特許になるか, 中公新書 (1995).

1.2 問題の定義

一般の線形計画問題の定義を始めるまえに，少し線形代数で習った用語の復習をしておきましょう．実数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ に対し，次のように与えられる実変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の関数：

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

を**線形**（あるいは **1 次**）**関数** (linear function) とよびます．また，f が線形関数で，b が与えられた実数のとき，次のような関係式：

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b$$

を**線形等式** (linear equality)，

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b, \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b$$

を**線形不等式** (linear inequality) といいます．

線形計画問題 (linear programming problem; abbr, LP) とは，有限個の線形等式や線形不等式を満たすベクトル $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の中で，与えられた線形関数の値を最大にするものを求める問題で，一般に

$$(\mathrm{P}) \left|\begin{array}{lccccccccll} \text{最大化} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & +\cdots+ & c_nx_n & & & & & \\ \text{条　件} & a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & +\cdots+ & a_{in}x_n & = & b_i, & i = & 1, \ldots, k \\ & a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & +\cdots+ & a_{in}x_n & \leq & b_i, & i = & k+1, \ldots, \ell \\ & a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & +\cdots+ & a_{in}x_n & \geq & b_i, & i = & \ell+1, \ldots, m \end{array}\right.$$

のように定義されます．ここで，関数 $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ を線形計画問題 (P) の**目的関数** (objective function)，変数 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が満たすべき m 個の線形等式・線形不等式を**線形制約式**，または**線形制約条件** (linear constraint) とよびます．また，制約式すべてを満足する変数値のベクトルを**実行可能解** (feasible solution) といい，その集合：

$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{ccccccccc} a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & +\cdots+ & a_{in}x_n & = & b_i, & i = & 1, \ldots, k \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & +\cdots+ & a_{in}x_n & \leq & b_i, & i = & k+1, \ldots, \ell \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & +\cdots+ & a_{in}x_n & \geq & b_i, & i = & \ell+1, \ldots, m \end{array} \right\}$$

を**実行可能領域** (feasible region) とよびます．

例えば，例 1.1 のＫ君の朝食問題はＬＰであり，すでに見たように

$$
\left|\begin{array}{lrcrcl}
\text{最大化} & -\ 50x_1 & - & 65x_2 & & \\
\text{条　件} & 3x_1 & + & 2x_2 & \geq & 9 \\
 & \dfrac{1}{15}x_1 & + & \dfrac{2}{15}x_2 & \geq & \dfrac{1}{3} \\
 & \dfrac{1}{6}x_1 & & & \geq & \dfrac{1}{4} \\
 & x_1 & - & 3x_2 & \leq & 0 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \geq & 0 \\
 & x_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}\right. \tag{1.9}
$$

と定式化でき（最大化問題となっている点に注意），図 1.1 の網掛けが実行可能領域で，

$$(x_1,\, x_2) = (1.5,\ 3.0),\ \ (1.5,\ 2.25),\ \ (2.0,\ 1.5),\ \ (5.0,\ \ 5.0)$$

などはいずれも実行可能解です．

実行可能解 $\mathbf{x} = (x_1,\, x_2\ \ldots,\, x_n) \in X$ の中で目的関数を最大（問題 (1.8) のような最小化問題では最小）にするものを**最適解** (optimal solution) とよびます．図 1.1 から明らかなように，問題 (1.9) の実行可能解のうち

$$(x_1,\, x_2) = (2.0,\ 1.5)$$

が (1.9) の最適解となります．

例 1.2. 以下のような問題もＬＰの例です：

$$
\left|\begin{array}{llcrcrcl}
\text{最大化} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{条　件} & 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 6 \\
 & 2x_1 & & & + & 4x_3 & \leq & 4 \\
 & -\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \leq & 1 \\
 & \multicolumn{7}{l}{x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0,\quad x_3 \geq 0}
\end{array}\right. \tag{1.10}
$$

$$
\left|\begin{array}{lrrrrrrrrrr}
\text{最小化} & - & 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & & \\
\text{条　件} & - & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & -11 \\
 & - & 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & - & 4x_4 & \leq & -10 \\
 & - & 3x_1 & - & 2x_2 & & & + & 3x_4 & \geq & 1 \\
 & & & & & & \multicolumn{5}{l}{x_3 \leq 0, \quad x_4 \geq 0}
\end{array}\right. \tag{1.11}
$$

■

ＬＰの中には実行可能解を持たないものもあります．例えば，

$$
\left|\begin{array}{lrrrr}
\text{最大化} & & x_1 & + & 5x_2 \\
\text{条　件} & & x_1 & + & x_2 \geq 6 \\
 & - & x_1 & - & x_2 \geq -4
\end{array}\right. \tag{1.12}
$$

の実行可能領域：

$$X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \geq 6, \quad -x_1 - x_2 \geq -4\}$$

は空集合となっています．このような問題を**実行不可能な** (infeasible) 問題といい，実行可能領域が空でない問題を**実行可能な** (feasible) 問題といいます．最適解も実行可能解であるので，実行不可能な問題に最適解は存在しません．

それでは実行可能な問題であれば，常に最適解が存在するのでしょうか？ 次のＬＰを見てみましょう：

$$
\left|\begin{array}{lrrrrrr}
\text{最大化} & & 2x_1 & - & x_2 & & \\
\text{条　件} & - & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & - & x_1 & - & 3x_2 & \leq & -4
\end{array}\right. \tag{1.13}
$$

この問題では，任意の x_2 の値に対して x_1 の値を十分大きくとることによって実行可能解を得ることができます．そして目的関数値は $x_1 \to +\infty$ となるにしたがい，無限大に発散します．一般に，任意の実数 M に対して目的関数値 $> M$（最小化問題では $< M$）となるように実行可能解がとれるとき，そのＬＰは**非有界** (unbounded) であるといい，それ以外の問題は**有界** (bounded) であるといいます．したがって，非有解な問題は実行可能でも，最適解は存在しません．

以上からＬＰが最適解をもてば,「問題は実行可能で，かつ有界である」ことがわかります. 線形計画法における最も基本的な定理は，この逆も正しいことを主張します：

定理 1.1. [**ＬＰの基本定理**]
実行可能で有界な線形計画問題には最適解が存在する.

この定理は一見自明のようですが，ＬＰ以外の数理計画問題に対して同様の定理は必ずしも成り立ちません：

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最大化} & x_1 \\ \text{条　件} & x_1 \;<\; 5 \end{array}\right. \tag{1.14}$$

（注意： $x_1 = 5$ は実行可能解ではない.）

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & \exp(x_1) \\ \text{条　件} & \qquad x_1 \;\leq\; 0 \end{array}\right. \tag{1.15}$$

ＬＰの基本定理は，定理の条件を満たす任意のＬＰに対して実際に最適解を求めるアルゴリズム – シンプレックス法 – を与えることで証明されます. シンプレックス法については，２章で基本的なアイデアを紹介し，３章以降で詳しい説明を行います.

1.3　線形計画法の歴史

この章を閉じる前に線形計画法の歴史を簡単に見てみましょう [3]. 次のページの表を見ると，線形計画法に関連する研究に対して３度もノーベル賞が贈られている（ともに経済学賞）ことが目を引きます. 厳密には，Markowitz 他の研究は２次関数を最小化する２次計画法であり，Nash の研究も線形計画法の理論的な応用分野であるゲームの理論に属します. また，表の中の「多項式時間アルゴリズム」(polynomial-time algorithm) とは，求解に必要な演算の回数が最悪の場合でも変数の数や制約式の本数の多項式で抑えられる計算手法のことです. 多項式関数は，指数関数に比べて変数の値の増加に対する関数値の変化のオーダが小さいことから，多項式時間アルゴリズムが理論的には優れているとされています. しかし，この評価基準はあくまで「最悪の場合でもあまり悪くない」ことを保証しているに過ぎません. 第２章以降で紹介するシンプレックス法は，多項式時間アルゴリズムではなく，最悪の場合に

は指数時間の計算が必要となりますが,「平均的には」非常に効率のよい計算手法であることが知られています.

軍事	経済	線形計画	数学
			不等式理論
			Gordan (1873)
オペレーションズ			Fourier (1923)
・リサーチ	産業連関分析		Farkas (1923)
20 世紀はじめ	Leontief (1936)		Motzkin (1923)
			ゲームの理論
線形計画問題		シンプレックス法	Von Neuman &
(1947)		Dantzig (1947)	Morgenstern (1944)
	経済モデル	双対理論	
	Koopmans (1948)	Von Neuman (1947)	
	ノーベル賞 (1975)		
	Koopmans	多項式時間	
		アルゴリズム	
	Kantrovich	楕円体法	
	(資源の最適配分)	Khachian (1979)	
		内点法	
		Karmarkar (1984)	
	ノーベル賞 (1990)		
	Markowitz		
	Sharpe		
	Miller		
	(金融・投資理論)		
	ノーベル賞 (1994)		
	Nash		
	(ゲームの均衡解)		

参考文献

[3] V. Chvátal (訳: 坂田・飯野), 線形計画法 (上), 啓学出版 (1986).

宿題

1.1 次のＬＰについて，(a) 実行可能である，(b) 非有解である，(c) 最適解をもつ，ための s, t に関する必要十分条件を与えよ：

$$\left|\begin{array}{lccccc} \text{最大化} & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{条　件} & sx_1 & + & tx_2 & \leq & 1 \\ & & & x_1,\ x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

1.2 次の命題を証明，または逆証明せよ：

$$(\mathrm{P})\ \left|\begin{array}{lccccccc} \text{最大化} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & +\cdots+ & c_nx_n & & \\ \text{条　件} & a_{i1}x_1 & + & c_{i2} & +\cdots+ & a_{in}x_n & \leq & b_i, \quad i=1,\ldots,m \end{array}\right.$$

が非有解であれば，ある k に対して

$$(\mathrm{P}_k)\ \left|\begin{array}{lccccccc} \text{最大化} & x_k & & & & & & \\ \text{条　件} & a_{i1}x_1 & + & c_{i2} & +\cdots+ & a_{in}x_n & \leq & b_i, \quad i=1,\ldots,m \end{array}\right.$$

は非有解である．

1.3 一般の線形計画問題において，もし $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$, $\mathbf{x}^2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$ がいずれも実行可能解であれば，その凸結合：

$$\mathbf{x}^3 = (1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{x}^2, \quad \text{ただし } \lambda \text{ は } 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ なる実数}$$

も実行可能解となることを示せ．

1.4 **輸送問題** (transportation problem)

ある製造会社には，東京，名古屋，大阪に配送センターがある．これらのセンターには製品が，それぞれ 40, 20, 40 単位ずつある．一方，仙台，横浜，浜松，京都，神戸にある小売店では，それぞれ 25, 10, 20, 30, 15 単位の量を要求している．各センターと小売店の間の輸送費（百円 / 単位）は次の表のように与えられているとき，費用を最小にする輸送計画を立てよ．

	仙台	横浜	浜松	京都	神戸
東京	40	10	35	50	65
名古屋	95	50	20	35	40
大阪	100	75	40	15	20

1.5 混合物生成問題 (product mix problem)

ある製鉄所では金属 M1, M2, M3 を下の左表の比率で混合して合金を製造している．これらの金属は 4 種類の原料 R1, R2, R3, R4 に含まれるが，その成分比率は右の表のようになっている．各原料から不純物を除去するための費用（原料価格も含む）が右表の最下行のように与えられるとき，1 kg の合金を最小の費用で清算するには，どのように原料を使えばよいか？

金属	混合比 (重量)
M1	20 %
M2	35 % 以下
M3	45 % 以上

	R1	R2	R3	R4
M1	20 %	30	15	10
M2	15	30	65	5
M3	30	10	0	80
不純物	35	30	20	5
費用 (千円 /kg)	5	5	8	20