付録 C　演習問題のヒント

1.2　「A: $\forall k$, (Q_k) が有界 $\Rightarrow$ B: (P) は有界」を示せばよい：

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} \ &\Rightarrow\ \forall k,\ 0 \le x_k \le x_k^* \quad (x_k^* \text{ は } (\mathrm{Q}_k) \text{ の最適値}) \\
&\Rightarrow\ \forall k,\ -|c_k| x_k^* \le c_k x_k \le |c_k| x_k^* \\
&\Rightarrow\ -\textstyle\sum_k |c_k| x_k^* \le \sum_k c_k x_k \le \sum_k |c_k| x_k^* \\
&\Rightarrow\ \mathrm{B}
\end{aligned}$$

1.3　問題の実行可能領域を S で表そう：

$$\left|\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
\text{条　件} & \boldsymbol{x} \in S = \left\{ \boldsymbol{x} \in R^n \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, & i = 1, \ldots, k, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \le b_i, & i = k+1, \ldots, k', \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \ge b_i, & i = k'+1, \ldots, m \end{array} \right\}
\end{array}\right.$$

「$\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in S \Rightarrow \lambda \boldsymbol{x}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^2 \in S, \quad \lambda \in [0,1]$」を示す．これは，集合 S が凸集合 (convex set) であることの定義。

1.4, 5　この種の問題では，変数の非負条件が忘れられがち．

2.2　(a) 第 4.2 および 4.3 節の議論を使えば，きっちりと証明することができる： シンプレックス法では，(1) 主問題の実行可能性と (2) 相補スラック性を保ちながら反復が行なわれ，最終的に (3) 双対問題の実行可能性が達成される．
(b) 最適な辞書において，$c_j = 0$ となっている列や，あるいは $b_i = 0$ となっている行でピボットを行なっても目的関数値に変化はないことに注意．

3.2　同じ基底変数，非基底変数をもつ 2 つの辞書を次のように表そう：

$$(\mathrm{D}_1)\quad \begin{array}{lcrcrcccrcccr}
x_{B(1)} & = & b_1 x_0 & - & a_{11} x_{N(1)} & - & \cdots & - & a_{1s} x_{N(s)} & - & \cdots & - & a_{1n} x_{N(n)} \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \vdots \\
x_{B(m)} & = & b_m x_0 & - & a_{n1} x_{N(1)} & - & \cdots & - & a_{ns} x_{N(s)} & - & \cdots & - & a_{mn} x_{N(n)} \\
\hline
z & = & c_0 x_0 & + & c_1 x_{N(1)} & + & \cdots & + & c_s x_{N(s)} & + & \cdots & + & c_n x_{N(n)}
\end{array}$$

$$
(\mathrm{D}_2)\quad
\begin{array}{lcrcrcccrcccr}
x_{B(1)} & = & b'_1 x_0 & - & a'_{11}x_{N(1)} & - & \cdots & - & a'_{1s}x_{N(s)} & - & \cdots & - & a'_{1n}x_{N(n)} \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \vdots \\
x_{B(m)} & = & b'_m x_0 & - & a'_{n1}x_{N(1)} & - & \cdots & - & a'_{ns}x_{N(s)} & - & \cdots & - & a'_{mn}x_{N(n)} \\
\hline
z & = & c'_0 x_0 & + & c'_1 x_{N(1)} & + & \cdots & + & c'_s x_{N(s)} & + & \cdots & + & c'_n x_{N(n)}
\end{array}
$$

この２つの辞書は同値，つまり同じ解集合をもつので，次の D_1 の解 $(\boldsymbol{x}', z')$ は D_2 を満足するはず：

$$x'_0 = 0;\ \ x'_{N(s)} = 1;\ \ x'_{N(j)} = 0,\, j \neq s;\ \ x'_{B(i)} = -a_{is};\ \ z' = c_s$$

そこで，$\boldsymbol{x}'$ を D_2 に代入してみると，第 i 行は

$$-a_{is} = -a'_{is}$$

同様に，第 $m+1$ 行から，$c_s = c'_s$ が得られる．

3.6 $w = 0$ で初期化が終了すれば，x_a が基底であろうと非基底であろうと必ず $x_a = 0$ となっていることに注意．従って，x_a が基底に残っていれば，補助問題の最適辞書は退化している．

4.1 定理 4.1 の証明くらい独力でできて欲しい．

4.3 ＬＰ最適性条件は，定理 4.4 より，

(i) 主問題の実行可能性; (ii) 双対問題の実行可能性; (iii) 目的関数値の一致，

あるいは定理 4.5 より，

(i) 主問題の実行可能性; (ii) 双対問題の実行可能性; (iii’) 相補スラック性

であることを忘れないように．(iii) や (iii’) だけ調べるのは片手落ち。

4.4 $x_1 = 1/6, x_2 = 1/6 (> 0)$ より、$y_{m+1} = y_{m+2} = 0$。したがって、

$$\begin{cases} a_{i1}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m = c_1 \\ a_{i2}y_1 + \cdots + a_{m2}y_m = c_2 \end{cases} \tag{C.1}$$

一方、$x_1 = 1/6, x_2 = 1/6$ を不等号で満たす制約式 i に対しては、

$$x_{n+i} > 0 \Rightarrow y_i = 0 \tag{C.2}$$

(C.1), (C.2) を連立させて解く。

4.6　問題 4.3 のヒントでも述べたが，ＬＰの最適性条件は，

(i) 主問題の実行可能性; (ii) 双対問題の実行可能性; (iii’) 相補スラック性

である．通常のシンプレックス法が

(i) と (iii’) を保ちならが， (ii) の実現を目指す

のに対し，双対シンプレックス法は

(ii) と (iii’) を保ちながら (i) の実現を目指す．

前者を*主シンプレックス法* (primal simplex method) とも呼ぶが，双対シンプレックス法は本質的には双対問題に主シンプレックス法を適用することに等価である．

4.7　対応する双対辞書は，

$-$	$\ominus \quad \cdots \quad \ominus$	$\exists j$ 行

となることに注意．第 j 行は，どの非基底変数に関して解いても，定数項が非負とはならない．

4.8　１つめのＬＰを (P)，その双対問題を (D) とし，２つめのＬＰを (P’)，その双対問題を (D’) としよう． (D’) の最適解を $\boldsymbol{y}^\circ$ とすれば，弱双対定理から (P’) の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ との間に

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} (b_i + t_i) y_i^\circ \tag{C.3}$$

の関係があることがわかる．さて，ここで注意したいのは， (D) と (D’) の制約条件は同じであることである．したがって， (D) の最適解 $\boldsymbol{y}^*$ は (D’) の実行可能解でもある．ただし， $\boldsymbol{y}^*$ が (D’) の最適解である保証はないので，

$$\sum_{i=1}^{m} (b_i + t_i) y_i^\circ \leq \sum_{i=1}^{m} (b_i + t_i) y_i^*. \tag{C.4}$$

２つの不等式 (C.3) と (C.4)，そして少し頭を働かせればよい．