付録 B　Bland のピボット選択規則の正当性

Bland のピボット選択規則（最小添字規則）
(Bland's pivot rule, or smallest subscript rule)

ピボット列の選択:　$c_s > 0$ を満たすピボット列の候補 s が複数あれば，変数 $x_{N(s)}$ の添字 $N(s)$ が最も小さなものを選ぶ,

ピボット行の選択:　$b_r \,/\, a_{rs} = \min\{b_i \,/\, a_{is} \mid a_{is} > 0,\ \ i = 1, \ldots, m\}$ を満たすピボット行の候補 r が複数あれば，変数 $x_{B(r)}$ の添字 $B(r)$ が最も小さなものを選ぶ.

定理 **B.1** [Bland, 1977].　Bland のピボット選択規則を使えば，シンプレックス法は必ず有限回で終了する.

証明.　Bland のピボット選択規則によって巡回が生じ，辞書 $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \ldots, \mathrm{D}_h = \mathrm{D}_1$ を生成したと仮定し，矛盾を導く.

辞書 $\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_{h-1}$ の中で，基底と非基底を行き来する変数の添字集合を

$$F = \{j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_t\},\quad \text{ただし}\quad j_1 < j_2 < \cdots < j_t$$

で表す．その中で最大の添字をもつ変数 x_{j_t} が，基底に入るときの辞書 D と，基底から出るときの辞書 D' について考えよう．ピボット選択規則により，２つの辞書 D, D' は次のような構造をもつことがわかる：

$$\mathrm{D} \ = \ \begin{array}{c|cccc|}
 & j_i\,(\in F) & j_t & j\,(\notin F) & \\
\hline
 & & & & \\
 & & & & \\
\hline
\cdot & \ominus & \ominus & + & \cdots \\
\hline
\end{array}$$

$$\mathrm{D'} \ = \ \begin{array}{|c|c|l}
 & j_k & \\
\hline
 & \vdots & j\,(\notin F) \\
0 & - & j_t \\
0 & \oplus & \\
0 & \oplus & j_i\,(\in F) \\
\hline
\cdot & + & \\
\hline
\end{array}$$

ここで，$\oplus$ は非負，$\ominus$ は非正の係数を表す．また，辞書 D において F に含まれない基底変数の添字集合（および非基底変数添字集合）は，辞書 D' のそれに等しいが，この集合を B （および N) と表すことにする．

一般に，ＬＰの辞書は $m+n+2$ 変数をもつ等式系：

$$\left|\begin{array}{lllllllll} x_{n+1} & = & b_1x_0 & - & a_{11}x_1 & - & a_{12}x_2 & -\cdots- & a_{1n}x_n \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ x_{n+m} & = & b_mx_0 & - & a_{m1}x_1 & - & a_{m2}x_2 & -\cdots- & a_{mn}x_n \\ x_{n+m+1} & = & c_0x_0 & + & c_1x_1 & + & c_2x_2 & +\cdots & c_nx_n, \end{array}\right. \tag{B.1}$$

またはこれと同値な等式系を表現していると考えることができる．ここで，辞書 D の構造に注目すれば，(B.1) の解として

$$\left.\begin{array}{l} x'_0=0,\quad x'_{n+m+1}>0,\quad x'_{j_t}<0, \\ x'_{j_i}\geq 0,\quad \forall i\neq t, \\ x'_j=0,\quad \forall j\in N, \end{array}\right\} \tag{B.2}$$

を満たす $\boldsymbol{x}'$ の存在することがわかる．一方，辞書 D は (B.1) と同値な等式系なので，$\boldsymbol{x}'$ は D の最後の行に対応する等式：

$$x_{n+m+1}=d_0x_0+\sum_{i\neq t}d_{j_i}x_{j_i}+d_{j_t}x_{j_t}+\sum_{j\in N}d_jx_j \tag{B.3}$$

を満たしていなければならない．ところが，(B.2) と

$$d_{j_i}\leq 0,\ \forall i\neq t,\quad d_{j_t}>0$$

から，$\boldsymbol{x}'$ を代入した (B.3) の右辺は正，左辺は負となり，仮定の矛盾が導かれる．言い換えれば，シンプレックス法は Bland 規則を併用すれば巡回を起こさず，従って有限回の反復ののちに終了する．　□

この証明は，

Bland, R.C., “New finite pivoting rules for the simplex method”, *Mathematics of Operations Research* **2** (1977), 103 – 107.

による．また，

今野　浩，線形計画法，日科技連 (1987).
Chvv́atal, V.（坂田・藤野訳），線形計画法（上），啓学出版 (1986).

にも詳しい証明が書かれている．