A　数理計画法の参考書について

数理計画法 (mathematical programming) とは，**最適化問題** (optimization problem)

(P) | n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の部分集合 X 上で関数 $f : D \to \mathbf{R}^1$（ただし，$X \subseteq D \subseteq \mathbf{R}^n$）の値を最小（あるいは最大）にするベクトル $\mathbf{x}^* \in X$ を求めよ

を数値的に解決する方法，主として**アルゴリズム** (algorithm) をさす．問題 (P) は**数理計画問題** (mathematical programming problem, or mathematical progeram) ともよばれ，数式を使って

$$(P) \left| \begin{array}{ll} \text{最小化} & f(\mathbf{x}) \\ \text{条　件} & \mathbf{x} \in X \end{array} \right.$$

と簡潔に表現される．一般に集合 X も複数の関数 $g_i : D \to \mathbf{R}^1$ $(i = 1, \ldots, m)$ によって

$$X = G \cap \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ \ i = 1, \ldots, m\}$$

と表されるが，ここで G は $\mathbf{R}^n$ や整数ベクトルの集合 $\mathbf{Z}^n$ などである．

最適化問題は，以下に示す関数 f と集合 X の性質によって２つのクラスに大別され，それぞれに適用することのできるアルゴリズムも大きく異なる．

関数の凸性　関数 f が任意の２点 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in D$ に対して

$$f[(1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{x}^2] \leq (1-\lambda)f(\mathbf{x}^1) + \lambda f(\mathbf{x}^2), \quad \forall\lambda \in [0,\ 1]$$

を満たすとき，f を**凸関数** (convex function) とよぶ．

集合の凸性　集合 X が任意の２点 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X$ に対して

$$(1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{x}^2 \in X, \quad \forall\lambda \in [0,\ 1]$$

を満たすとき，X を**凸集合** (convex set) とよぶ．

A.1　凸計画問題

関数 f と集合 X がともに凸である最適化問題 (P) を**凸計画問題** (convex program) といい，そのアルゴリズムは数理計画法の分野で最も発達している．凸計画問題は，さらに次の２つに細分される．

A.1.1 線形計画問題

関数 f が 1 次関数で，X を定義する g_i もすべて 1 次，さらに $G = \mathbf{R}^n$ である凸計画問題を特に**線形計画問題** (linear program, or LP) とよぶ．線形計画問題は，非常に大規模な場合（m, n が数万！）でも短時間のうちに効率よく解くことができるだけでなく，集合 X が**グラフ** (graph) によって特徴づけられる**ネット ワーク流問題** (network flow) をはじめとする応用上重要な各種の問題を含んでいる．

LP 全般の参考書

田村・村松, 最適化法, 共立出版 (2002)
今野　浩, 線形計画法, 日科技連 (1987)
V. Chvátal (訳: 坂田・藤野), 線形計画法 (上), 啓学出版 (1986)
伊理正夫, 線形計画法, 共立出版 (1986)

ネット ワーク流の参考書

藤重　悟, グラフ・ネットワーク・組合せ論, 共立出版 (2002)
V. Chvátal (訳: 坂田・藤野), 線形計画法 (下), 啓学出版 (1988)
伊理・藤重・大山, グラフ・ネットワーク・マトロイド, 産業図書 (1986)

A.2 (凸) 非線形計画問題

線形計画問題以外の凸計画問題の総称が (凸) **非線形計画問題** ((convex) nonlinear program) である．中でも，f が 2 次の凸関数で，線形計画問題と同じ X をもつ (凸) 2 次計画問題 ((convex) quadraftic program) は，資産運用や最小二乗法などに応用され，線形計画問題に次いで効率的に解くことができる．

非線形計画問題の参考書

田村・村松, 最適化法, 共立出版 (2002)
今野・山下, 非線形計画法, 日科技連 (1978)
福島雅夫, 非線形最適化の理論, 産業図書 (1980)

A.3 非凸計画問題

関数 f か集合 X のいずれか一方，あるいは両方が凸性を満たさない最適化問題 (P) を**非凸計画問題** (nonconvex program) とよぶ．関数 f と g_i が線形計画問題と同様にすべて 1 次であっても，$G = \mathbf{Z}^n$ である**整数計画問題** (integer program) はこのクラスに含まれ，巡回セー

ルスマン問題に代表される**組合せ最適化** (combinatorial optimization) にも関連して応用上きわめて重要である．しかし，現在この分野の知識は凸計画問題のそれに比べてごくわずかであり，今後の数理計画法における大きな研究課題となっている．

組合せ最適化の参考書

今野・鈴木 他, 整数計画法と組合せ最適化, 日科技連 (1982)
茨木俊秀, 組合せ最適化 – 分枝限定法を中心として, 産業図書 (1983)
大山・久保, 巡回セールスマン問題への招待, 朝倉書店 (1997)
今野　浩, 整数計画法, 産業図書 (1981)

一般の非凸計画問題を扱った参考書は洋書に優れたものが多いが，残念ながら日本語で書かれたものは今のところ存在しない．

一般の非凸計画の参考書

R. Horst and H. Tuy, *Global Optimization (3rd ed.)*, Springer-Verlag (1995)
R. Horst, P.M. Pardalos and N.V. Thoai, *Instroduction to Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers (1995)

A.4　数理計画問題全般

以上の他に，数理計画全般を扱ったものとして，

数理計画全般の参考書

G.L. Nemhausear, A.H.G. Rinnooy Kan and M.J. Todd (監訳: 伊理・刀根・今野), 最適化ハンドブック, 朝倉書店 (1995)
茨木・福島, 最適化の手法, 共立出版 (1993)
刀根　薫, 数理計画法, 朝倉書店 (1978)
森　他, オペレーションズ・リサーチ I, 朝倉書店 (1991)

は定評がある．また，数理計画法の応用を扱ったものとしては，

数理計画応用の参考書

今野　浩, 数理決定法入門 – キャンパスのＯＲ, 朝倉書店 (1992)
今野　浩, 実践数理決定法, 日科技連 (1997)
H.P. Williams (監訳: 前田), 数理計画モデルの作成法, 産業図書 (1995)

これらはいずれも，厄介な問題に直面したとき，それを数理計画法によって解決するためのヒントを与えてくれるが，中でも「数理決定法入門」は，その副題通り，某工業大学の学生たちが自ら解決した (!) 身近な問題を例に数理計画法をはじめとする**オペレーションズ・リサーチ** (operations research, OR) の手法をわかりやすく解説した好著である．

日本語の入門書を中心に紹介したが，日本語にこだわらなければ，

数理計画の洋書

R. Ahuja, T.L. Magnanti and J.B. Orline, *Network Flows – Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice Hall (1993)
M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis and H.D. Sherali, *Linear Programming and Network Flows (2nd ed.)*, John Wiley and Sons (1990)
M.S. Bazaraa, H.D. Sherali and C.M. Shetty, *Nonlinar Programming – Theory and Algorithms (2nd ed.)*, John Wiley and Sons (1993)
C.H. Papadimitriou, *Combinatorial Optimization – Algorithms and complexity*, Prentice Hall (19820)

などの名著があり，どれも 1 冊読むだけでその分野の権威になることができる．もっとも，権威を維持するためには，

数理計画の雑誌

Mathematical Programming, Mathematics of Operations Research, J. of Optimization Theory and Applications, Computational Optimization and Applications, J. of Global Optimization, J. of the Operations Research Society of Japan

などの学術雑誌で数理計画法の最新研究を知る必要もある (‘J.’ は ‘Journal’)．

さて，ここに紹介した参考書すべてを読破することは在籍中には不可能であるし，もちろんその必要もない．各項目はほぼ推薦したい順にソートしてあるので，その第一に挙げられている参考書を一通り読めば，数理計画法はほぼ完全にマスターできる．しかし，興味のあるものを一つ選んでじっくり読むだけでも十分である．そのためには，どの項目に興味が持てるかを知る必要があるが，今野著「数理決定法入門」か，あるいは

今野　浩, カーマーカー特許とソフトウェア – 数学は特許になるか, 中公新書 (1995)

がその答を与えてくれるはずである．この２つで数理計画法の面白さは存分に知ることができる．