5　ボロノイ図

平面 $\mathbb{R}^2$ 上に n 個の点 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ が与えられたとき，$\mathbf{v}_i$ の「勢力圏」を

$$V_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\mathbf{x},\ \mathbf{v}_i) \leq d(\mathbf{x},\ \mathbf{v}_j),\ \ j \neq i,\ \ j = 1,\ \ldots,\ n\} \tag{5.1}$$

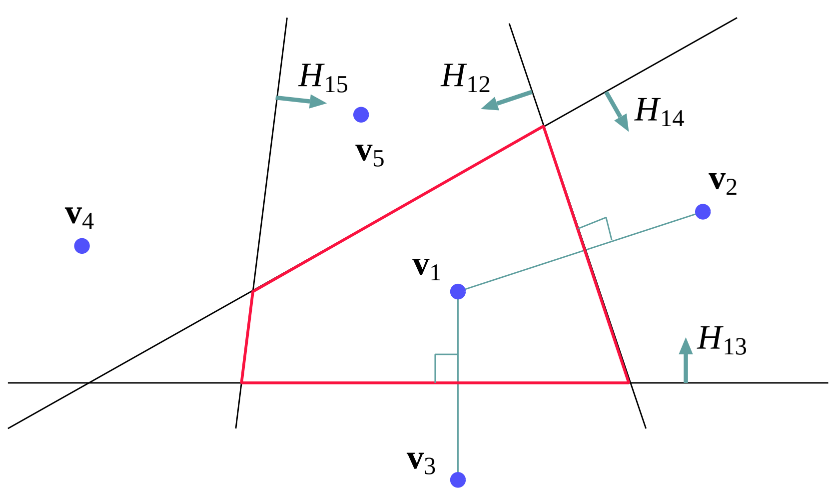
で定義し，点 $\mathbf{v}_i$ に対する**ボロノイ領域** (Voronoi region) とよび，$\mathbf{v}_i$ はボロノイ領域の母点といいます．このボロノイ領域 $V_1, V_2, \ldots, V_n$ による平面の分割:

$$\mathcal{V}^n = \{V_i \mid i = 1,\ \ldots,\ n\}$$

が**ボロノイ図** (Voronoi diagram) です．

ボロノイ図の性質

与えられた母点の集合 $\{\mathbf{v}_i \mid i = 1,\ \ldots,\ n\}$ から $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ を選び，２点を結ぶ線分を垂直二等分する線分を引いてみましょう．平面はこの直線によって２つの領域に分割されますが，その一方を**半平面** (half plane) とよびます．母点 $\mathbf{v}_1$ が含まれる側の半平面を H_{12} で表せば，明らかにどの点 $\mathbf{x} \in H_{12}$ も $\mathbf{v}_2$ より $\mathbf{v}_1$ の近くに位置します．同じように母点 $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_j$ $(j = 3,\ 4,\ \ldots,\ n)$ を結ぶ垂直二等分線の $\mathbf{v}_1$ 側の半平面を H_{1j} で表せば，$\mathbf{x} \in H_{1j}$ は $\mathbf{v}_j$ よりも $\mathbf{v}_1$ に近いことがわかります．つまり，$H_{12} \cap H_{13} \cap \cdots \cap H_{1n}$ は，他のどの母点よりも母点 $\mathbf{v}_1$ に近い点の集合を表しており，$\mathbf{v}_1$ の「勢力圏」にほかなりません．したがって，母点 $\mathbf{v}_i$ と $\mathbf{v}_j$ を結ぶ線分の垂直二等分



線で分けられる $\mathbf{v}_i$ 側の半平面を H_{ij} で表すことにすれば，$\mathbf{v}_i$ のボロノイ領域は (5.1) の代わりに

$$V_i = H_{i1} \cap \cdots \cap H_{i,i-1} \cap H_{i,i+1} \cap \cdots \cap H_{in}$$

と書くこともできます．この作図法から，ボロノイ図のもつ次の性質がわかります:

性質 5.1. ボロノイ領域 V_i は $\mathbb{R}^2$ の凸多面体である．

この性質からボロノイ領域は，ボロノイ (凸) 多角形ともよばれ，その頂点，辺はそれぞれ**ボロノイ点**，**ボロノイ辺**とよばれます．

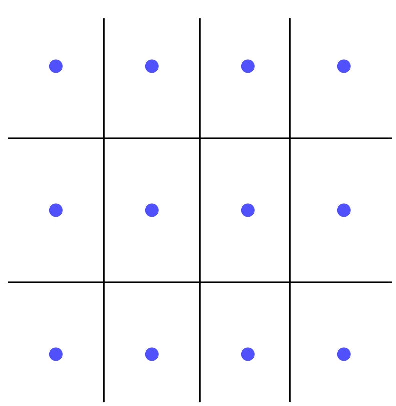
ボロノイ領域 V_i のボロノイ辺は，半平面 H_{ij} $(j \neq i,\ j = 1,\ \ldots,\ n)$ の境界の一部から作られます．この境界は全部で $n-1$ 本ありますが，中にはボロノイ辺とならない境界もあります．ボロノイ辺となる境界を作り出した母点を，**ボロノイ辺を生成する母点**といいます．

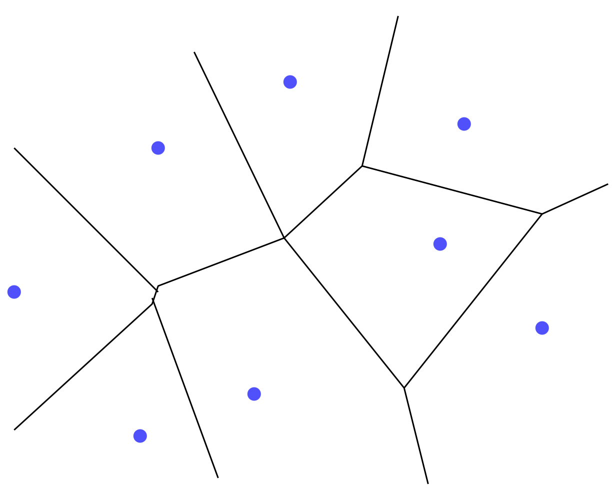
性質 5.2. ボロノイ辺は，それを生成する母点を結んだ垂直二等分線の一部である．

今度は，１つのボロノイ点に集まるボロノイ辺の数に注目しましょう．

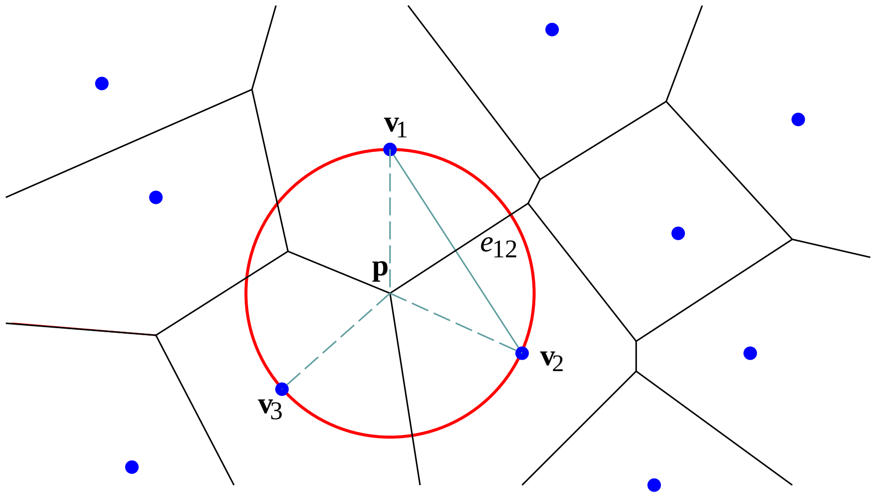
性質 5.3. ボロノイ点では，通常３本のボロノイ辺が集まる．

例えば，格子状に母点が並んでいる場合にはボロノイ領域は長方形になり，各ボロノイ点には４本のボロノイ辺が集まることもあります．このように４本以上のボロノイ辺が集まるボロノイ点が少なくとも１つある場合，そのボロノイ図は**退化している** (degenerate) といいます．





性質 5.2 から，ボロノイ辺上の点は，そのボロノイ辺を生成する２つの母点から等距離にあります．例えば，次のボロノイ図で，ボロノイ辺 e_{12} 上の点は $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ から等距離にあり，ボロノイ



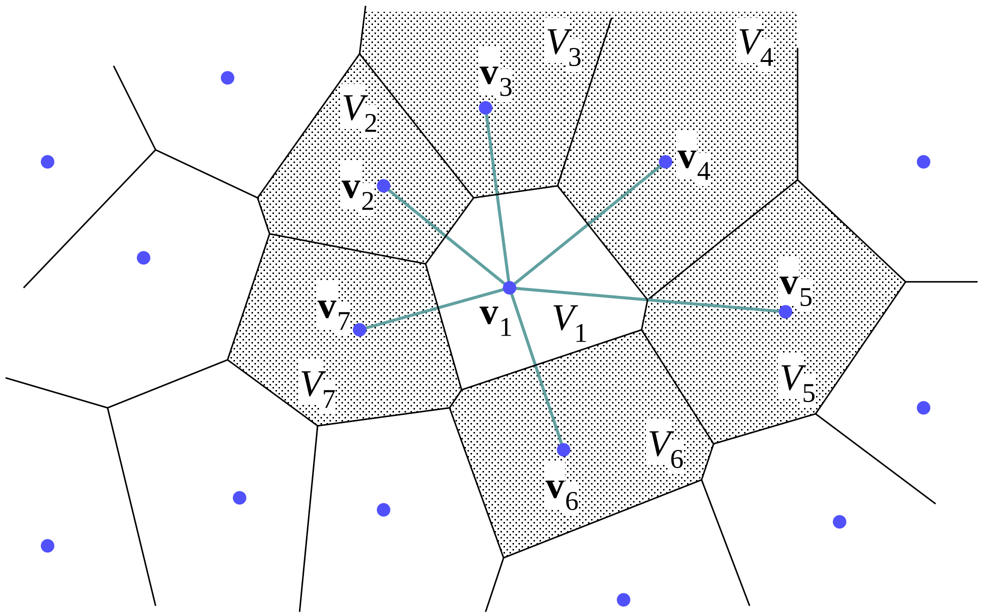
辺 e_{13} 上の点は $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3$ から等距離にあります．したがって，ボロノイ辺 e_{12} と e_{13} の交点であるボロノイ点 $\mathbf{p}$ は $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ から等距離にあります．この例からわかるように，一般に次の性質があります:

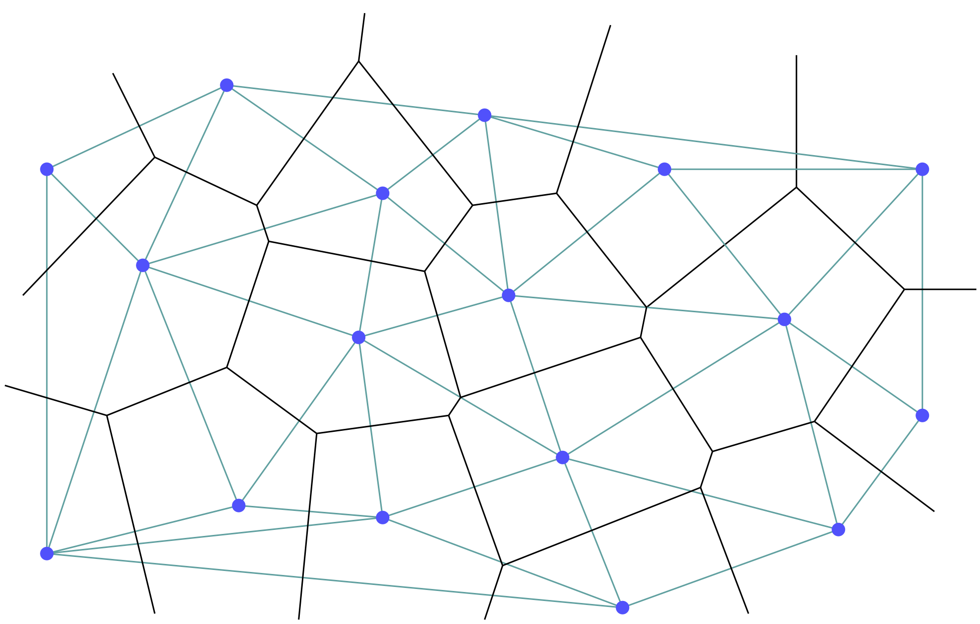
性質 5.4. ボロノイ領域 V_i のボロノイ点 $\mathbf{p}$ を中心に半径 $d(\mathbf{p},\ \mathbf{v}_i)$ の円を描くと，この円は少なくとも 3 つの母点を通り，その内側に他の母点は含まれない．

このように円周を除く内部に 1 つも母点を含まない点のことを**空白円**といいます．

5.1 ドローネ網

2 つのボロノイ領域 V_i, V_j が 1 つのボロノイ辺を共有しているとき，V_i と V_j は**隣接している**といいます．1 つのボロノイ領域 V_1 を選び，これに隣接しているボロノイ領域 V_i の母点 $\mathbf{v}_i$ と $\mathbf{v}_1$ を線分で結べば，ボロノイ領域 V_1 の隣接関係を図示することができます．この操作を V_1 だけでなく，すべてのボロノイ領域におこなって得られる図形が**ドローネ網** (Delaunay net) です．ボロノイ領域が退化していなければ，ドローネ網は母点の集合 $\{\mathbf{v}_i \mid i = 1,\ \ldots,\ n\}$ の凸包の三角形分割となり，その 1 つ 1 つの三角形を**ドローネ三角形** (Delaunay triangle) とよびます．

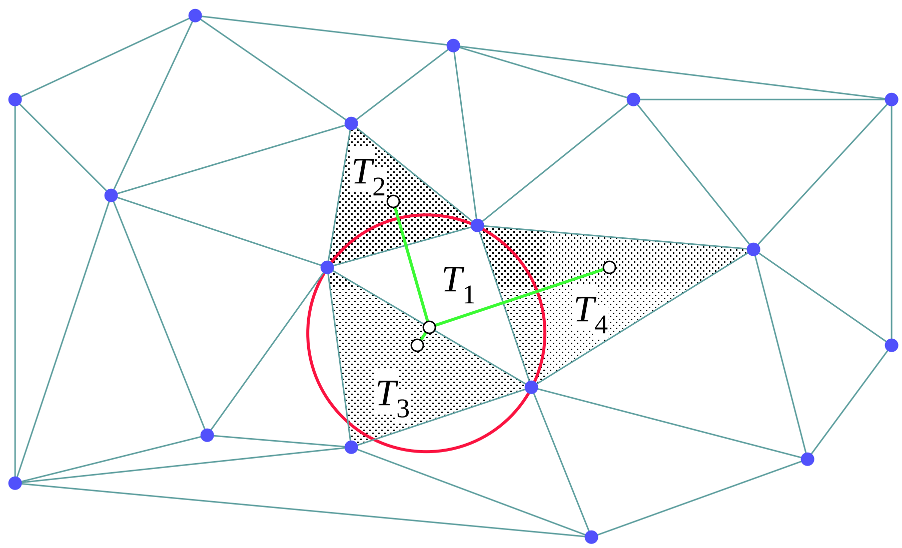

V_3
V_4
$\mathbf{v}_3$
V_2
$\mathbf{v}_4$
$\mathbf{v}_2$
$\mathbf{v}_5$
$\mathbf{v}_7$
$\mathbf{v}_1$
V_1
V_7
V_5
V_6
$\mathbf{v}_6$



ボロノイ図とドローネ網の性質

ドローネ三角形の各辺は，隣接するボロノイ領域の２つの母点を結んだ線分ですから，性質5.2を思い出せば，それらの母点が生成するボロノイ辺の垂直二等分線であることがわかります．そのようなボロノイ辺は３本ありますが，性質5.3より，１つのボロノイ点に集まります．言い換えれば，ドローネ網におけるそれぞれのドローネ三角形は１つのボロノイ点に対応しているわけです．さらに，性質5.4に述べた円を思い出せば，ボロノイ点から対応するドローネ三角形の各頂点までの距離は等しいことがわかります．三角形の３つの頂点までの距離が等しい点は，その三角形の外心，外心を中心として３頂点を通る円は外接円です．

性質 5.5. ボロノイ点は，ドローネ三角形の外心である．



ドローネ網においても，ボロノイ図と同様にドローネ三角形の隣接関係を図示できます．ドローネ三角形 T_1 と辺を共有する T_2, T_3, T_4 は隣接しているといい，T_1 の外心と T_i $(i = 2,\ 3,\ 4)$ の外心とを線分で結んでこの隣接関係を図示することにしましょう．実は，この操作をすべてのドローネ三角形について行って得られる図形はボロノイ図にほかなりません．このような隣接関係が表裏一体となっている図形を**双対図形**といいます．

性質 5.6. ボロノイ領域の隣接関係を示したものがドローネ三角形の辺であり，ドローネ三角形の隣接関係を示したものがボロノイ辺である．

さて，ここで 1.1 節の例 1.3 に挙げた全最近点問題を少し考えてみましょう．与えられた n 個の点 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ の中で $\mathbf{v}_1$ に最も近い点はどれになるでしょうか．それには $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ を母点とするボロノイ図を作成してみればわかります．つまり，$\mathbf{v}_1$ を母点にもつボロノイ領域 V_1 に隣接するボロノイ領域の母点の中に，$\mathbf{v}_1$ に最も近い点が存在します．

性質 5.7. 各母点に最も近い母点は，その母点のボロノイ領域に隣接するボロノイ領域の母点の中にある．

この性質から，点 $\mathbf{v}_1$ に最も近い点を見つけだすには，V_1 に隣接するボロノイ領域の母点との間の距離を比較するだけでよく，他の点との距離は考慮する必要がないので，ボロノイ図が作成してあれば計算の手間を大幅に省くことができます．

5.2 ボロノイ図作成のためのアルゴリズム

ボロノイ多角形 V_i を幾何的に求める最も素朴な方法は，すでにボロノイ図の性質のところで述べました．例えば，$i = 1$ ならば，

ステップ 1: $V_1 := \mathbb{R}^2$ とおき，以下のステップ k を $k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n$ まで繰り返す．

ステップ k: $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_k$ を結ぶ線分の垂直二等分線 l_{1k} を引き，それを境界とする $\mathbf{v}_1$ 側の半平面 H_{1k} を求め，$V_1 := V_1 \cap H_{ik}$ とおく．

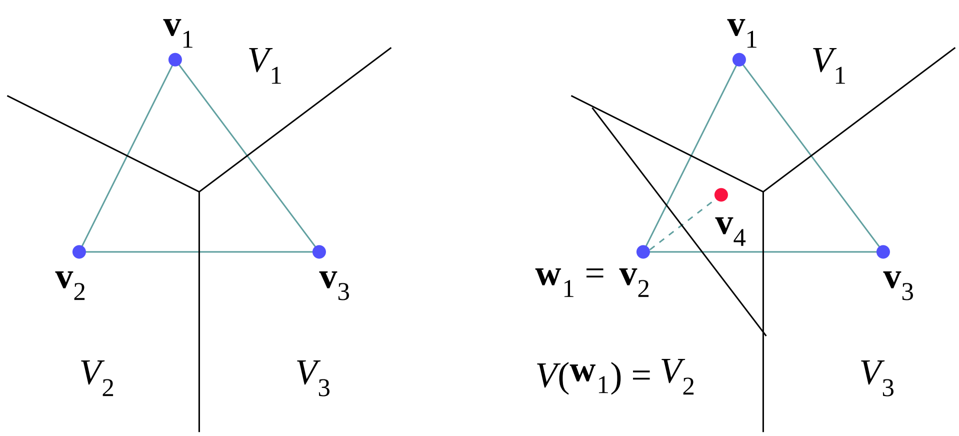
このような方法だと，各ステップで直線 l_{1k} と $k-2$ 本の直線 l_{1j} $(j = 2,\ 3,\ \ldots,\ k-1)$ との交点を求める必要があり，その計算量は $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) = (n^2 - 3n + 2)/2$ に比例します．ボロノイ図を作成するには，この作業をすべての点 $\mathbf{v}_i$ $(i = 1,\ \ldots,\ n)$ に関して行わなければならないので，結局 $O(n^3)$ もの手間がかかってしまうことになります．ボロノイ図を効率よく作成するには，凸包問題と同様，逐次添加法や分割統治法を用いることができます．

母点の添加

ここでは，逐次添加法によるボロノイ図の作成法について説明しましょう．まず，3 つの母点 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ からなるボロノイ図 $\mathcal{V}^3$ を作り，これに母点 $\mathbf{v}_4$ を添加して母点 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ からなるボロノイ図 $\mathcal{V}^4$ を作ります．

３つの母点からなるドローネ網は，その母点をドローネ三角形の頂点とすることで直ちに求めることができます．性質 5.5 より，このドローネ三角形の外心からそれぞれの辺に垂線を下ろせばボロノイ図 $\mathcal{V}^3$ のできあがりです．

次に母点 $\mathbf{v}_4$ が添加されます．この $\mathbf{v}_4$ に最も近い母点を，すでにボロノイ図 $\mathcal{V}^3$ を定義している母点 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ の中から選び，それを $\mathbf{w}_1$ $(= \mathbf{v}_2)$ とよぶことにします．母点 $\mathbf{v}_4$ と $\mathbf{w}_1$ を結ぶ線分の垂直二等分線を引き，これと $\mathbf{w}_1$ に対するボロノイ領域 $V(\mathbf{w}_1)$ $(= V_2)$ のボロノイ辺の交点を求めます．２つの交点のうち，どちらか一方を $\mathbf{p}_1$ とします．この点 $\mathbf{p}_1$ の乗っているボロノイ辺でボロノイ領域 $V(\mathbf{w}_1)$ に隣接するボロノイ領域の母点を $\mathbf{w}_2$ $(= \mathbf{v}_1)$ とします．

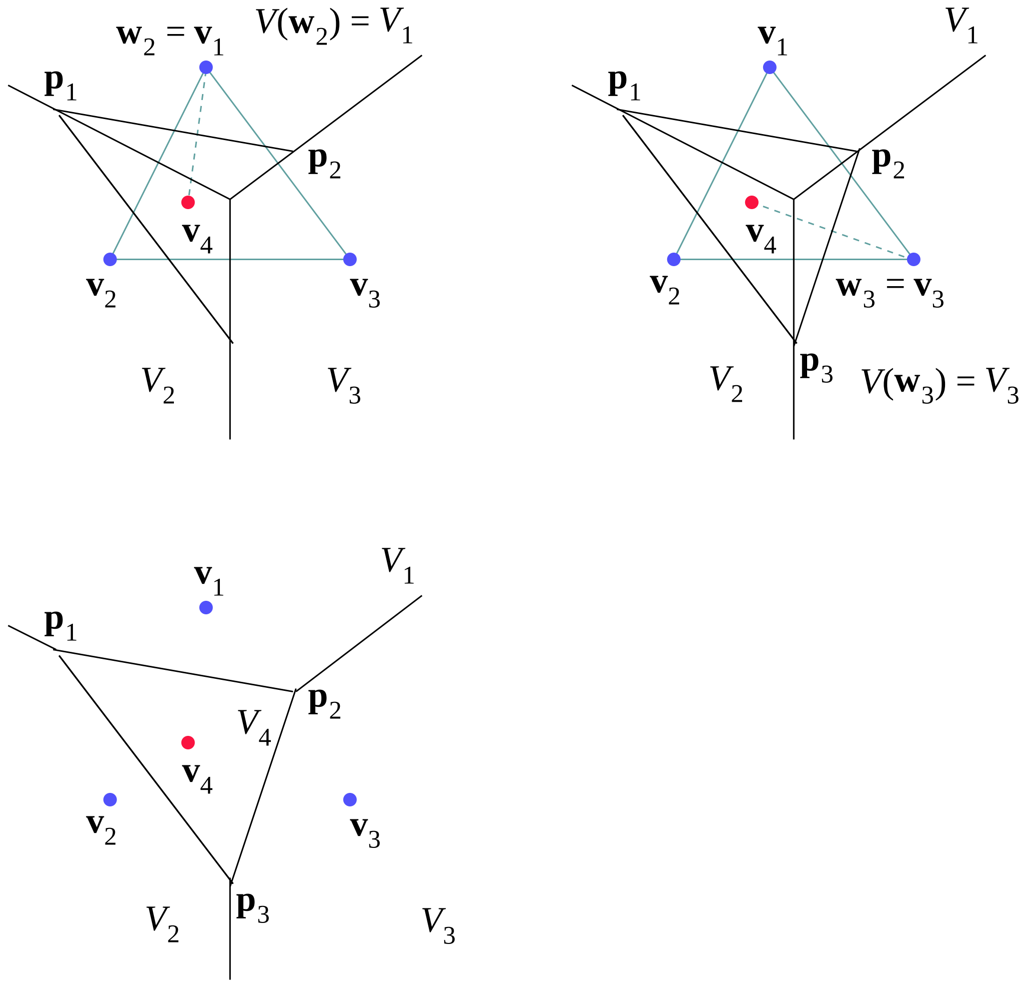


今度は $\mathbf{v}_4$ と $\mathbf{w}_2$ を結ぶ線分の垂直二等分線を引き，これと $\mathbf{w}_2$ のボロノイ領域 $V(\mathbf{w}_2)$ $(= V_1)$ のボロノイ辺との交点を求め，$\mathbf{p}_1$ でない方の交点を $\mathbf{p}_2$ とします．そして点 $\mathbf{p}_2$ の乗っているボロノイ辺でボロノイ領域 $V(\mathbf{w}_2)$ に隣接するボロノイ領域の母点を $\mathbf{w}_3$ $(= \mathbf{v}_3)$ とします．

再び，ボロノイ点 $\mathbf{v}_4$ と $\mathbf{w}_3$ を結ぶ線分の垂直二等分線を引いて $\mathbf{w}_3$ のボロノイ領域 $V(\mathbf{w}_3)$ $(= V_3)$ のボロノイ辺との交点を求め，$\mathbf{p}_2$ でない方を $\mathbf{p}_3$ とします．

先に与えられた母点が４つ以上の場合には同じ操作をさらに繰り返しますが，ここでは点 $\mathbf{p}_3$ に乗っているボロノイ辺でボロノイ領域 $V(\mathbf{w}_3)$ に隣接するボロノイ領域の母点が最初の $\mathbf{w}_1$ に一致し，添加された母点 $\mathbf{v}_4$ を取り囲む $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ からなる多角形が得られています．この多角形の内部にあるボロノイ辺を消し去ることで得られる図形が，母点 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ からなるボロノイ図 $\mathcal{V}^4$ です．

こうして得られた４つの母点からなるボロノイ図 $\mathcal{V}^4$ に５つめの母点 $\mathbf{v}_5$ を添加し，$\mathcal{V}^4$ を作成



したときと同じ作業によってボロノイ図 $\mathcal{V}^5$ を作成します．一般には，ボロノイ図 $\mathcal{V}^k$ に母点 $\mathbf{v}_{k+1}$ を添加して以下の手順でボロノイ図 $\mathcal{V}^{k+1}$ を作成します:

手続き 添加 $(\mathbf{v}_{k+1})$

begin

母点 $\mathbf{v}_{k+1}$ に最も近い母点を $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ から見つけ，それを $\mathbf{w}_1$ とおく;

母点 $\mathbf{v}_{k+1}$ と $\mathbf{w}_1$ を結ぶ線分の垂直二等分線とボロノイ領域 $V(\mathbf{w}_1)$ の交点を求め，どちらか一方の交点を $\mathbf{p}_1$ とする;

点 $\mathbf{p}_1$ の乗っているボロノイ辺で，$V(\mathbf{w}_1)$ と隣接するボロノイ領域の母点を $\mathbf{w}_2$ とする;

$i := 2$;

while $\mathbf{w}_1 \neq \mathbf{w}_i$ **do begin**

母点 $\mathbf{v}_{k+1}$ と $\mathbf{w}_i$ とを結ぶ線分の垂直二等分線とボロノイ領域 $V(\mathbf{w}_i)$ の交点を求め，交点 $\mathbf{p}_{i-1}$ 以外の交点を $\mathbf{p}_i$ とする;

点 $\mathbf{p}_i$ の乗っているボロノイ辺で，$V(\mathbf{w}_i)$ と隣接しているボロノイ領域の母点を $\mathbf{w}_{i+1}$ とする;

$i := i + 1$;

end;

多角形 $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{i-1}$ の内部にあるボロノイ図 $\mathcal{V}^k$ の線分を消し，得られた図形を $\mathcal{V}^{k+1}$ とする

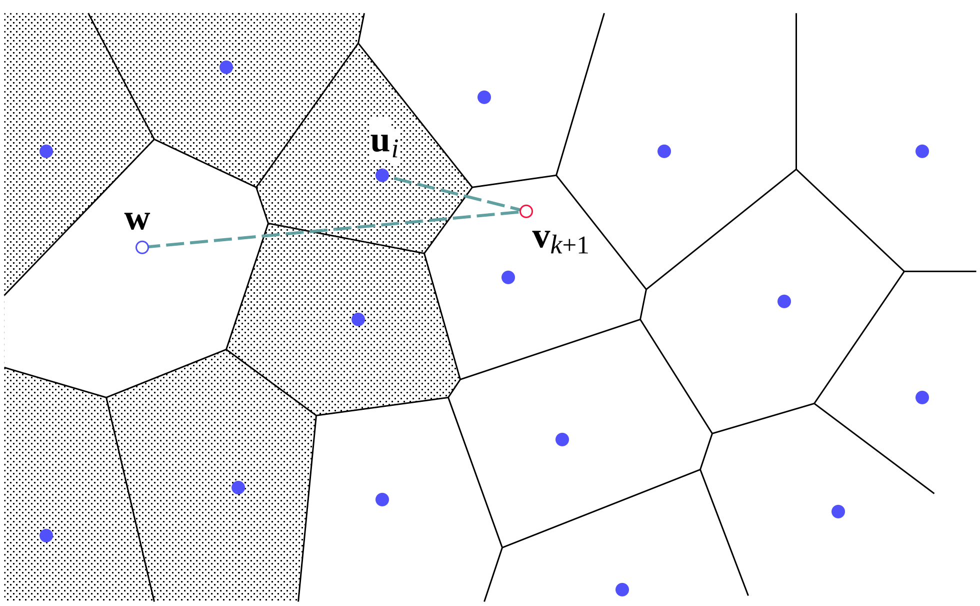
end;

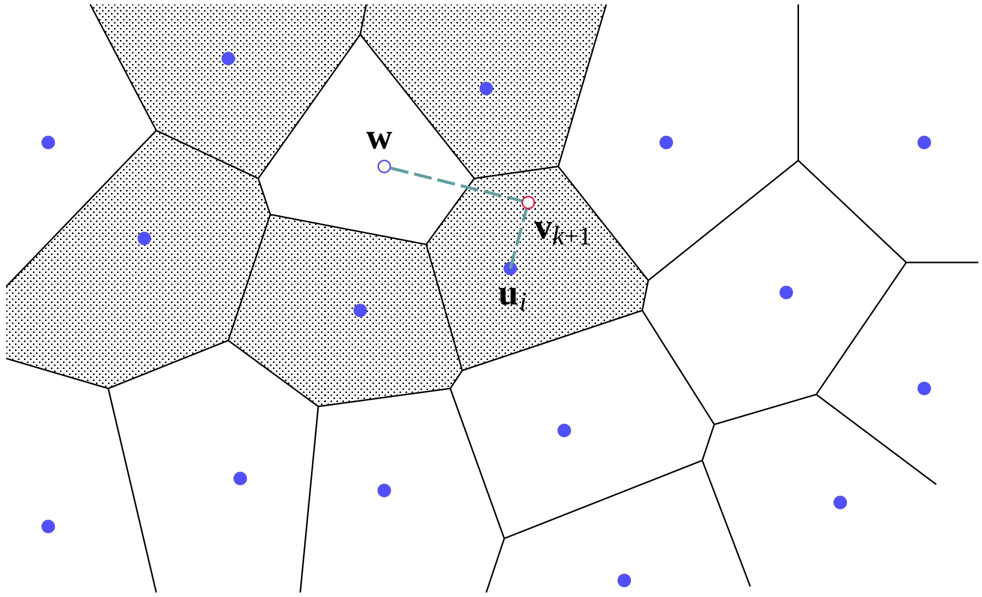
最近点の探索

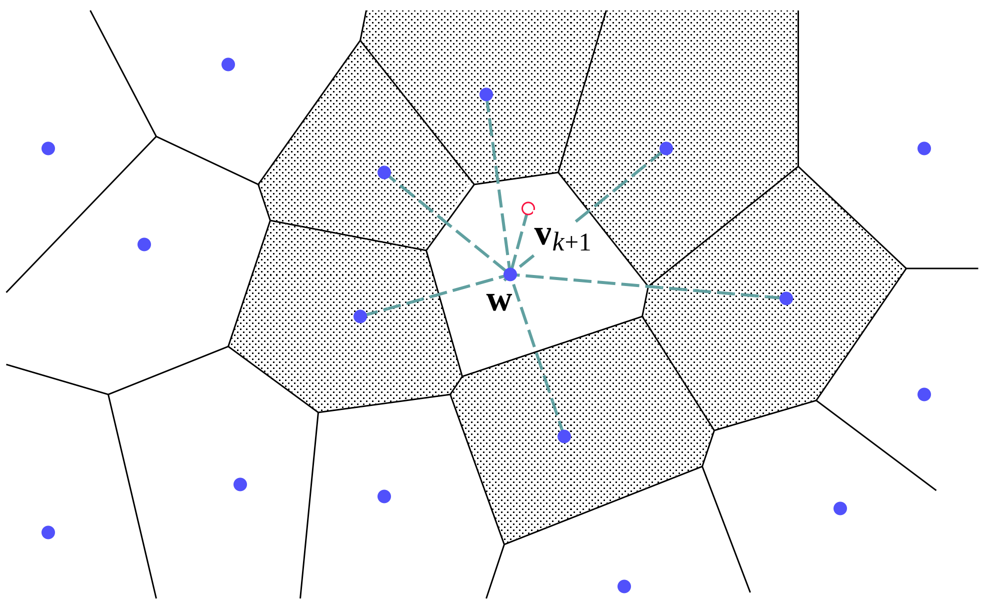
さて，手続き添加 $(\mathbf{v}_{k+1})$ の各ステップで，簡単そうで難しいのが，最初に行う添加母点 $\mathbf{v}_{k+1}$ に最も近い母点 $\mathbf{w}_1$ を $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ から見つけだす作業です．図を見れば一目瞭然ですが，計算機には図を見るべき「目」がないので，手探りで探し出すような方法を取らざるをえません．

それには，まず任意の母点を選び，それを $\mathbf{w}$ とします．次にボロノイ領域 $V(\mathbf{w})$ に隣接するボロノイ領域の母点 $\mathbf{u}$ の中で，

$$d(\mathbf{u},\ \mathbf{v}_{k+1}) < d(\mathbf{w},\ \mathbf{v}_{k+1}) \tag{5.2}$$







を満たす母点 $\mathbf{u}$ があるかどうかを調べます．もしも，そのような母点 $\mathbf{u}$ がなければ，母点 $\mathbf{w}$ が $\mathbf{v}_{k+1}$ に最も近い母点です．不等式 (5.2) を満たす母点 $\mathbf{u}$ があれば，これを改めて $\mathbf{w}$ とします．そして，再びボロノイ領域 $V(\mathbf{w})$ に隣接するボロノイ領域の母点の中で (5.2) を満たす母点があるかどうかを調べます．

手続き 最近点 $(\mathbf{v}_{k+1})$

begin

母点 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ から任意に 1 つを選び，それを $\mathbf{w}$ とする;

nearest := *false*;

while nearest = *false* **do begin**

ボロノイ領域 $V(\mathbf{w})$ に隣接するボロノイ領域の母点を $\mathbf{u}_1$ とする;

$V(\mathbf{w})$ と $V(\mathbf{u}_1)$ に隣接するボロノイ領域で，どちらか一方の母点を $\mathbf{u}_2$ とする;

$i := 2$;

while $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{u}_1$ **and** $d(\mathbf{u}_i,\ \mathbf{v}_{k+1}) \geq d(\mathbf{w},\ \mathbf{v}_{k+1})$ **do begin**

ボロノイ領域 $V(\mathbf{w})$ と $V(\mathbf{u}_i)$ に隣接するボロノイ領域で $V(\mathbf{u}_{i-1})$ とは異なる方の母点を $\mathbf{u}_{i+1}$ とする;

$i := i + 1$;

end;

if $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_i$ **then** $\mathbf{w} := \mathbf{u}_i$ **else** nearest := *true*

end

end;

逐次添加法のアルゴリズムと計算量

以上２つの手続きをまとめれば，ボロノイ図 $\mathcal{V}^n$ を作成する逐次添加法は次のように記述できます:

アルゴリズム 逐次添加２

begin

母点 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ からなるボロノイ図 $\mathcal{V}^3$ を作る;

for $k = 3,\ \ldots,\ n-1$ **do**

手続き最近点 $(\mathbf{v}_{k+1})$ と添加 $(\mathbf{v}_{k+1})$ を用いてボロノイ図 $\mathcal{V}^k$ に母点 $\mathbf{v}_{k+1}$ を添加し，ボロノイ図 $\mathcal{V}^{k+1}$ を作る

end

end;

このアルゴリズムの計算量を調べるために，まず手続き最近点 ($\mathbf{v}_{k+1}$) を見ると，外側の **while** ループは母点 $\mathbf{v}_{k+1}$ と $\mathbf{w}$ との距離が毎回減少するので高々k 回の反復で終了します．その j 回目の反復で，内側の **while** ループではボロノイ領域 $V(\mathbf{w})$ に隣接する m_j 個のボロノイ領域 $V(\mathbf{u}_i)$ $(i = 1, \ldots, m_j)$ が探索されるものとしましょう．これらの母点から $d(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_{k+1}) < d(\mathbf{w}, \mathbf{v}_{k+1})$ を満たす 1 点が新たな $\mathbf{w}$ として選ばれますが，そのボロノイ領域と隣接する 2 つのボロノイ領域を除き，$m_j - 3$ 個のボロノイ領域 $V(\mathbf{u}_i)$ は以後探索されることがありません．先に与えられた母点の総数は k しかありませんから，次の不等式が成り立ちます:

$$\sum_{j=1}^{k}(m_j - 3) \leq k.$$

これより，探索されるボロノイ領域の総数が

$$\sum_{j=1}^{k} m_j \leq 4k$$

となり，$O(k)$ の計算量で $\mathbf{v}_{k+1}$ に最も近い母点 $\mathbf{w}$ が見つかります．

手続き添加 ($\mathbf{v}_{k+1}$) では，添加母点 $\mathbf{v}_{k+1}$ に対する最近母点 $\mathbf{w}_1$ さえ見つかれば，$\mathbf{w}_1$ とそのボロノイ領域 $V(\mathbf{w}_1)$ に隣接するボロノイ領域の母点との間に線分を引く操作だけで終了しますので，最悪の場合でも先に与えられた母点の総数 k に比例する手間しかかかりません．

以上の観察と母点の数が毎回 1 つづつ増えることを考え合わせれば，アルゴリズム逐次添加 2 の最悪計算量が

$$O\left(\sum_{k=3}^{n} k\right) = O(n^2)$$

でおさえられることがわかります．