3.4 凸集合とその性質

直線 (line): $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}^n$ の２点を通る直線は，

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = (1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda \mathbf{x}^2,\ \ \lambda \in \mathbb{R}\},$$

あるいは

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}^1 + \lambda_2 \mathbf{x}^2,\ \ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$$

で定義されます．

線分 (line segments): $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}^n$ の２点を結ぶ線分には，以下の４種類があります:

(a) 閉線分 $[\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = (1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda \mathbf{x}^2,\ \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$

(b) 開線分 $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = (1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda \mathbf{x}^2,\ \ 0 < \lambda < 1\}$

(c) 閉開線分 $[\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = (1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda \mathbf{x}^2,\ \ 0 \leq \lambda < 1\}$

(d) 開閉線分 $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = (1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda \mathbf{x}^2,\ \ 0 < \lambda \leq 1\}$

凸集合 (convex set): 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ は，S の任意の２点を結ぶ閉線分が S に含まれるとき，凸集合とよびます:

$$\left\langle \begin{array}{l} \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in S \\ \lambda \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leq \lambda \leq 1 \end{array} \right\rangle \Longrightarrow (1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda \mathbf{x}^2 \in S.$$

半空間 (halfspace): ゼロベクトルではない $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ とスカラー $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} < \alpha\}$$

を $\mathbb{R}^n$ の開半空間，

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \leq \alpha\}$$

を $\mathbb{R}^n$ の閉半空間とよびます．どちらの半空間も凸集合です．

平面 (plane):　ゼロベクトルではない $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ とスカラー $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \alpha\}$$

を $\mathbb{R}^n$ の平面とよびます．$\mathbb{R}^n$ の平面はすべて凸集合です．

部分空間 (subspace):　集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ が

$$\left\langle \begin{array}{c} \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in S \\ \\ \lambda_1, \lambda_2 \in R \end{array} \right\rangle \Longrightarrow \lambda_1\mathbf{x}^1 + \lambda_2\mathbf{x}^2 \in S.$$

を満たすとき，S を部分空間とよびます．$\mathbb{R}^n$ の部分空間はすべて原点を含み，また凸集合でもあります．

頂点 (vertex):　S を $\mathbb{R}^n$ の凸集合としましょう．点 $\mathbf{x} \in S$ は，$\mathbf{x} \in [\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2]$ を満足する $\mathbf{x}$ と異なる 2 点 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in S$ が存在しないとき，S の端点といいます．

定理 3.9.　(有限個でも無限個でも) 凸集合 S_i $(i \in I)$ の積集合 $\cap_{i \in I} S_i$ は凸集合である．

証明:　任意に $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \cap_{i \in I} S_i$ を選び，$0 \le \lambda \le 1$ とします．すると，各 $i \in I$ に対して $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in S_i$ であり，S_i は凸集合であるので $(1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{x}^2 \in S_i$ が成り立ちます．したがって，$(1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{x}^2 \in \cap_{i \in I} S_i$ も成り立ち，$\cap_{i \in I} S_i$ は凸集合であることがわかります．

凸多面体 (polyhedron / polytope):　$\mathbb{R}^n$ の有限個の半空間の積集合として表すことのできる $\mathbb{R}^n$ の部分集合を凸多面体 (polyhedron) とよびます．凸多面体が有界な場合，これを有界な凸多面体 (polytope) とよびます．

凸結合 (convex combination):　点 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ は，$\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m \in \mathbb{R}^m$ と m 個の実数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ によって

$$\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{a}^1 + \cdots + \lambda_m\mathbf{a}^m, \;\; \lambda_1, \ldots, \lambda_m \ge 0, \;\; \lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1,$$

のように表すことができるとき，$\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m \in \mathbb{R}^m$ の凸結合といいます．

単体 (simplex): $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^m$ $(m \le n)$ を $\mathbb{R}^n$ の異なる $m+1$ 個の点としましょう．m 個のベクトル $\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0, \ldots, \mathbf{x}^m - \mathbf{x}^0$ が線形独立のとき，$\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^m$ のすべての凸結合の集合:

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \mathbf{x} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \mathbf{x}^i,\ \ \lambda_i \ge 0, i = 1, \ldots, m,\ \ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1 \right\}$$

を $\mathbb{R}^n$ における頂点 $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^m$ の m 単体とよびます．例えば，0 単体は点であり，1 単体は閉線分，2 単体は三角形となります．

定理 3.10. 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ が凸である必要十分条件は，任意の整数 $m \ge 1$ に対して以下が満たされることである:

$$\left\langle \begin{array}{l} \mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^m \in S \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_m \ge 0 \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1 \end{array} \right\rangle \Longrightarrow \lambda_1 \mathbf{x}^1 + \cdots \lambda_m \mathbf{x}^m \in S. \tag{3.1}$$

証明: 十分性については，(3.1) で $m = 2$ の場合を考えれば，定義どおりに S は凸集合であることがわかります．

必要性は帰納法を用いて証明します．$m = 1$ のときは自明，$m = 2$ のときは凸集合の定義によって成り立ちます．では (3.1) が $m = k$ に対して成り立つことを仮定し，それが $m = k+1$ のときにも成り立つことを示しましょう．以下のような $k+1$ 個の点と実数を選びます:

$$\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^{k+1} \in S, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1} \ge 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{k+1} = 1$$

$\lambda_{k+1} = 0$ のときと $\lambda_{k+1} = 1$ のときは，それぞれ $m = k$，$m = 1$ の場合に帰着します．そこで $0 < \lambda_{k+1} < 1$ とすると，$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i > 0$ となるので

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \mathbf{x}^i = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right) \left(\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i} \mathbf{x}^1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i} \mathbf{x}^k \right) + \lambda_{k+1} \mathbf{x}^{k+1}.$$

さらに

$$\mathbf{x}^0 = \frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i} \mathbf{x}^1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i} \mathbf{x}^k$$

とおけば，$m = k$ に対して (3.1) が成り立つと仮定していることから $\mathbf{x}^0 \in S$ であり，以下のように $m = 2$ の場合に帰着します:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \mathbf{x}^i = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right) \mathbf{x}^0 + \lambda_{k+1} \mathbf{x}^{k+1} \in S.$$

■

定理 3.11. [Carathéodory の定理]

点 $\mathbf{x}$ が集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ の点の凸結合であるならば，$\mathbf{x}$ は S の $n+1$ 個以下の点の凸結合である．

証明: 点 $\mathbf{x}$ が $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^m \in S$ の凸結合として

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}^i, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0, \quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$$

のように表されているものとし，$m > n+1$ を仮定すると $\mathbf{x}$ は S の $m-1$ 個以下の点の凸結合として書けることを示しましょう．$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ のうちに 1 つでもゼロがあれば，$\mathbf{x}$ は $m-1$ 個以下の点の凸結合として書けたことになるので，ここでは $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$ とします．$m-1$ 個のベクトル $\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^m, \ldots, \mathbf{x}^{m-1} - \mathbf{x}^m$ は，$m > n+1$ なので線形従属であり，

$$p_1(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^m) + \cdots + p_{m-1}(\mathbf{x}^{m-1} - \mathbf{x}^m) = \mathbf{O}$$

を満たす $(p_1, \ldots, p_{m-1}) \neq \mathbf{O}$ が存在します．ここで，$p_m = -p_1 - \ldots - p_{m-1}$ とおけば

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i \mathbf{x}^i = \mathbf{O}$$

となります．次に，

$$q_i = \lambda_i - \alpha p_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

とおき，$q_1, \ldots, q_m$ のうちの少なくとも 1 つがゼロ，残りの q_i は非負となるように α を設定します．具体的には

$$\frac{1}{\alpha} = \max\left\{ \frac{p_i}{\lambda_i} \,\middle|\, i = 1, \ldots, m \right\}$$

とおくことで $q_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ とできます．必要なら添字を付け換えればよいので $p_m/\lambda_m = 1/\alpha$ としましょう．すると，

$$\sum_{i=1}^{m-1} q_i = \sum_{i=1}^{m} q_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i - \alpha \sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$$

となり，また

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}^i = \sum_{i=1}^{m} q_i \mathbf{x}^i + \alpha \sum_{i=1}^{m} p_i \mathbf{x}^i = \sum_{i=1}^{m-1} q_i \mathbf{x}^i$$

が得られ，$\mathbf{x}$ が S の $m-1$ 個の点の凸結合であることがわかります．

もしも $m-1 > n+1$ ならば，以上の操作を何度か繰り返すことで $\mathbf{x}$ を表す S の点の数を高々 $n+1$ 個まで減らすことができます． ■

凸包 (convex hull):　集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ の凸包 $\mathrm{cov}(S)$ とは，S を含む $\mathbb{R}^n$ の凸集合すべての積集合です．S が凸集合であれば，もちろん $S = \mathrm{cov}(S)$ となります．

定理 3.12.　集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ の凸包 $\mathrm{cov}(S)$ は S の凸結合すべての集合に等しい．

証明:　S の凸結合すべての集合を T で表すことにします．つまり，$\mathbf{x} \in T$ ならば，ある整数 $k \geq 1$ に対して

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}^i, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

を満たす $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^m \in S$ と $\lambda_1, \ldots, \lambda \geq 0$ が存在することになります．この T から任意に $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2$ を選べば，

$$\mathbf{y}^1 = \sum_{i=1}^{\ell} p_i \mathbf{a}^i, \quad \sum_{i=1}^{\ell} p_i = 1, \quad \mathbf{a}^i \in S,\ p_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, \ell$$
$$\mathbf{y}^2 = \sum_{i=1}^{m} q_i \mathbf{b}^i, \quad \sum_{i=1}^{m} q_i = 1 \quad \mathbf{b}^i \in S,\ q_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m$$

と表すことができます．したがって $0 \leq \lambda \leq 1$ に対し，

$$(1-\lambda)\mathbf{y}^1 + \lambda \mathbf{y}^2 = \sum_{i=1}^{\ell} (1-\lambda) p_i \mathbf{a}^i + \sum_{i=1}^{m} \lambda q_i \mathbf{b}^i$$

であり，

$$(1-\lambda)p_i \geq 0, \quad \lambda q_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\ell} (1-\lambda) p_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda q_i = 1$$

となります．このことは $(1-\lambda)\mathbf{y}^1 + \lambda \mathbf{y}^2$ が S の凸結合であることを意味し，$(1-\lambda)\mathbf{y}^1 + \lambda \mathbf{y}^2 \in T$ となって，T は凸集合であることがわかります．また，明らかに $S \subset T$ であり，T が凸集合であることから $\mathrm{cov}(S) \subset T$ です．さらに，定理 3.10 により，S を含む凸集合 $\mathrm{cov}(S)$ は S の点の凸結合もすべて含むはずです．つまり，$T \subset \mathrm{cov}(S)$，したがって $T = \mathrm{cov}(S)$ です．■

定理 3.13.　２つの凸集合 $S, T \subset \mathbb{R}^n$ のミンコフスキー和 $S + T$ は凸集合である．

証明:　$S + T$ から任意に $\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2$ を選べば，$\mathbf{z}^1 = \mathbf{x}^1 + \mathbf{y}^1$ と $z^2 = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2$ を満たす $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in S$, $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2 \in T$ が存在します．任意の $0 \leq \lambda \leq 1$ に対して

$$(1-\lambda)\mathbf{z}^1 + \lambda \mathbf{z}^2 = (1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda \mathbf{x}^2 + (1-\lambda)\mathbf{y}^1 + \lambda \mathbf{y}^2$$

であるので，S, T の凸性から $(1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda \mathbf{x}^2 \in S$，$(1-\lambda)\mathbf{y}^1 + \lambda \mathbf{y}^2 \in T$ です．したがって，$(1-\lambda)\mathbf{z}^1 + \lambda \mathbf{z}^2 \in S + T$ であり，$S + T$ は凸集合です．■

定理 3.14.　凸集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ の α $(\in R)$ 倍 αS は凸集合である．

証明:　αS から $\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2$ を任意に選べば，$\mathbf{z}^1 = \alpha\mathbf{x}^1$，$\mathbf{z}^2 = \alpha\mathbf{x}^2$ を満たす $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in S$ が存在します．任意の $0 \le \lambda \le 1$ に対して

$$(1-\lambda)\mathbf{z}^1 + \lambda\mathbf{z}^2 = \alpha[(1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{x}^2].$$

集合 S の凸性により，$(1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{x}^2 \in S$，したがって $(1-\lambda)\mathbf{z}^1 + \lambda\mathbf{z}^2 \in \alpha S$ であるので αS は凸集合です． ■

系 3.15.　S と T が $\mathbb{R}^n$ の凸集合ならば，$S - T$ は凸集合である． ■

宿題

1.　以下を証明せよ:

(i)　$\mathbb{R}^n$ の開球 $B_\lambda(\mathbf{x}^0)$ はすべて開集合である．

(ii)　開球 $B_\lambda(\mathbf{a})$ の閉包 $\overline{B_\lambda(\mathbf{x}^0)}$ は

$$\overline{B}_\lambda(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| \le \lambda\}$$

に等しく，閉集合である．

($\overline{B}_\lambda(\mathbf{x}^0)$ を $\mathbf{x}^0$ を中心とする半径 λ の**閉球** (closed ball) とよびます．)

(iii)　閉球 $\overline{B}_\lambda(\mathbf{x}^0)$ の内部は開球 $B_\lambda(\mathbf{x}^0)$ である．

2.　任意の集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ の内部が開集合であることを示せ．

3.　任意の集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ の閉包が閉集合であることを示せ．

4.　与えられた $m \times n$ 行列 $\mathbf{A}$ と m ベクトル $\mathbf{b}$ に関して以下を証明せよ:

(i)　集合 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ は閉集合である．

(ii)　集合 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} < \mathbf{b}\}$ は開集合である．

5.　任意の開球 $B_\lambda(\mathbf{x}^0)$ および閉球 $\overline{B}_\lambda(\mathbf{x}^0)$ は凸集合であることを示せ．

6.　凸集合の内部は凸集合であることを示せ．