3 ユークリッド空間の集合と性質

計算幾何で扱うのは，主として２・３次元**ユークリッド空間** (Euclidean space) の集合ですが，ここではその理解を深めるため，一般の n 次元ユークリッド空間に関してよく知られている位相的性質を説明します．n 次元ユークリッド空間は，$n(\geq 1)$ 個の実数の組全体の集合 $\mathbb{R}^n$ に含まれる任意の２点 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$，$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ を選んだとき，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の間の距離が L_2 **ノルム** (L_2-norm)

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$$

によって与えられる**距離空間** (metric space) のことで，通常は単に $\mathbb{R}^n$ で表します．ユークリッド空間で定義される凸集合は計算幾何問題の中核を成し，その概念と性質を調べることで後に説明するアルゴリズムの効率化に役立てることができます．

3.1 開集合と閉集合

開球 (open ball): 与えられた点 $\mathbf{x}^0$ と実数 $\lambda > 0$ に対して集合 $B_\lambda(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \lambda\}$ を $\mathbf{x}^0$ を中心とする半径 λ の開球とよびます．

内点 (interior point): 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ に含まれる点 $\mathbf{x}$ に対して $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subset S$ を満たす実数 $\epsilon > 0$ が存在するとき，$\mathbf{x}$ を S の内点といいます．

集積点 (point of closure): 点 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ がすべての $\epsilon > 0$ に対して集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ と $B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap S \neq \emptyset$ の関係を満たすとき，$\mathbf{x}$ を S の集積点とよびます．

開集合 (open set): 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ に含まれる点がすべて S の内点であるとき，S を開集合といいます．

閉集合 (closed set): 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ の集積点がすべて S に含まれるとき，S を閉集合といいます．

閉包 (closure): 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ の集積点すべての集合を S の閉包とよび，$\overline{S}$ で表します．もちろん，$S \subset \overline{S}$ であり，S が閉集合のときには $S = \overline{S}$ が成り立ちます．

内部 (interior): 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ の内点すべての集合を S の内部とよび，$\mathrm{int}(S)$ で表します．もちろん，$\mathrm{int}(S) \subset S$ であり，S が開集合のときには $S = \mathrm{int}(S)$ が成り立ちます．

相対的開 [閉] 集合 (relatively open [closed] set): ２つの集合 S と T の間に $S \subset T \subset \mathbb{R}^n$ の関係があるものとします．このとき，$S = T \cap U$ を満たす開 [閉] 集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ が存在すれば，S は **T に関して開 [閉] 集合である** (open [closed] relative to T) といいます．もちろん，$S \subset \mathbb{R}^n$ が開 [閉] 集合であれば，S は $\mathbb{R}^n$ に関して開 [閉] 集合です．

定理 3.1. $\mathbb{R}^n$ の開集合族は以下の性質ももつ:

(a) 開集合の和集合は開集合である．

(b) **有限個の**開集合の積集合は開集合である．

(c) 空集合 $\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ は開集合である．

証明: (a) 開集合 $S_i \in \mathbb{R}^n$ $(i \in I)$ の和集合 $S = \cup_{i \in I} S_i$ について考えましょう．ここで，添字集合 I は有限でも無限でも構いません．任意の点 $\mathbf{x} \in S$ を選べば，$\mathbf{x} \in S_i$ となる $i \in I$ が存在します．S_i は開集合なので，ある $\epsilon > 0$ が存在し，

$$B_\epsilon(\mathbf{x}) \subset S_i \subset S$$

が成り立ちます．つまり，$\mathbf{x}$ は S の内点であり，S から任意に選ばれたことから S には内点しか含まれない，つまり開集合であることがわかります．

(b) 添字集合 I を有限集合として開集合 $S_i \in \mathbb{R}^n$ $(i \in I)$ の積を $S = \cap_{i \in I} S_i$ とします．任意の点 $\mathbf{x} \in S$ を選べば，すべての $i \in I$ に対して $\mathbf{x} \in S_i$ です．ところが S_i は開集合なので，各 $i \in I$ に対して $B_{\epsilon_i}(\mathbf{x}) \subset S_i$ を満たす $\epsilon_i > 0$ が存在します．そこで，$\epsilon = \min\{\epsilon_i \mid i \in I\}$ とおけば $\epsilon > 0$ (ここで I の有限性が働く) であり，すべての $i \in I$ に対して $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subset S_i$ とでき，

$$B_\epsilon(\mathbf{x}) \subset \bigcap_{i \in I} S_i = S$$

が満たされます．したがって，S の点 $\mathbf{x}$ をどのように選んでも，それは S の内点であるので S は開集合です．

(c) 空集合 $\emptyset$ からは点を選べないので，それを中心とする開球を考える必要はなく，$\emptyset$ は開集合となります．また $\mathbb{R}^n$ は，任意の点 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^n$ であるので，開集合です． ■

$\mathbb{R}^n$ の開集合族を $\mathbb{R}^n$ の**位相** (topology) とよびます．実は，定理 3.1 の 3 つの条件が位相の定義であり，したがって $\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ だけでも位相を構成できることがわかります．

定理 3.2. S を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする．このとき，

$$\mathbb{R}^n \setminus \overline{S} = \mathrm{int}(\mathbb{R}^n \setminus S).$$

証明: 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ を選んだとき,「$\mathbf{x}$ が S の集積点である」ことと「$\mathbf{x}$ が S の補集合の内点にならない」ことは同値です．対偶をとれば，$\mathbf{x} \notin \overline{S} \Longleftrightarrow \mathbf{x} \in \mathrm{int}(\mathbb{R}^n \setminus S)$ であり，$\mathbb{R}^n \setminus \overline{S} = \mathrm{int}(\mathbb{R}^n \setminus S)$ であることがわかります． ■

系 3.3. $\mathbb{R}^n$ の開 [閉] 集合の ($\mathbb{R}^n$ に関する) 補集合は閉 [開] 集合である．

証明: $S \subset \mathbb{R}^n$ を閉集合としましょう．したがって，$S = \overline{S}$ です．前の定理を使って $\mathbb{R}^n \setminus S = \mathbb{R}^n \setminus \overline{S} = \mathrm{int}(\mathbb{R}^n \setminus S)$ がえられ，補集合 $\mathbb{R}^n \setminus S$ が開集合であることがわかります．$S' = \mathbb{R}^n \setminus S$ とおけば，開集合 S' の補集合 $\mathbb{R}^n \setminus S'$ が閉集合であることは，この証明を逆に辿ることで示すことができます． ■

系 3.3 を用いれば，次の結果は定理 3.1 から直ちに導かれます．

定理 3.4. $\mathbb{R}^n$ の閉集合族は以下の性質をもつ:

(a) 閉集合の積集合は閉集合である．

(b) **有限個**の閉集合の和集合は閉集合である．

(c) 空集合 $\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ は閉集合である． ■

3.2　点列と上界・下界

点列 (sequence):　集合 X の点列とは，正の整数の集合 $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, \ldots\}$ から X への関数 f を意味します．各 $i \in \mathbb{Z}_+$ に対して $f(i) = \mathbf{x}^i \in X$ であれば，f は普通，$\{\mathbf{x}^i\}$ や $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$ と表されます．正の整数で $i^1 < i^2 < \cdots$ を満たすものに対して $\mathbf{x}^{i^1}, \mathbf{x}^{i^2}, \ldots$ を $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$ の**部分列** (subsequence) といいます．

極限点 (limit point):　$\mathbb{R}^n$ の点列 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$ に対して

$$\left\langle \begin{array}{l} \epsilon > 0 \\ i' = \text{正の整数} \end{array} \right\rangle \Longrightarrow \|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}'\| < \epsilon \text{ の成り立つ } i \geq i' \text{ が存在する}$$

とき，$\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ をこの点列の極限点といいます．

極限 (limit):　$\mathbb{R}^n$ の点列 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$ に対して

$$\epsilon > 0 \Longrightarrow \text{任意の } i \geq i^0 \text{ で } \|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^0\| < \epsilon \text{ の成り立つ整数 } i^0 > 0 \text{ が存在する}$$

とき，$\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ をこの点列の極限とよび，点列 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$ は**極限 $\mathbf{x}^0$ に収束する** (converges to a limit $\mathbf{x}^0$) といいます．

ここで注意すべきは,「極限は極限点だが，極限点は極限とは限らない」ことです．例えば，$\mathbb{R}^1$ の点列 $1, -1, 1, -1, \ldots$ は 1 と -1 を極限点にもちますが，極限は存在しません．また，$1, 1/2, 1/4, \ldots$ にはゼロが極限であり，したがって極限点ゼロをもちます．もう一つ注意して欲しいのは，$\mathbf{x}^0$ が点列 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$ の極限であれば，その任意の部分点列も $\mathbf{x}^0$ を極限とすることです．

定理 3.5.　(a)　$\mathbf{x}'$ が点列 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$ の極限点ならば，$\mathbf{x}'$ が極限となる部分点列 $\mathbf{x}^{i^1}, \mathbf{x}^{i^2}, \ldots$ が存在する．また逆に，$\mathbf{x}'$ が部分点列 $\mathbf{x}^{i^1}, \mathbf{x}^{i^2}, \ldots$ の極限ならば，$\mathbf{x}'$ は元の点列 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$ の極限点である．

(b)　点列 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$ が極限 $\mathbf{x}^0$ に収束すれば，その点列には $\mathbf{x}^0$ 以外に極限点を (したがって，極限も) もたない．

証明:　(a) $\mathbf{x}'$ を $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$ の極限点とします．このとき，

$$\begin{aligned}
\langle \epsilon > 0, i' > 0 \rangle \quad &\Longrightarrow \quad \exists i^1 \geq i' \mid \|\mathbf{x}^{i^1} - \mathbf{x}'\| < \epsilon \\
&\Longrightarrow \quad \exists i^2 \geq i^1 + 1 \mid \|\mathbf{x}^{i^2} - \mathbf{x}'\| < \epsilon/2 \\
&\Longrightarrow \quad \exists i^3 \geq i^2 + 1 \mid \|\mathbf{x}^{i^3} - \mathbf{x}'\| < \epsilon/2^2
\end{aligned}$$

と続けていけば，部分点列 $\mathbf{x}^{i^1}, \mathbf{x}^{i^2}, \ldots$ は $\mathbf{x}'$ に収束します．

逆に，$\mathbf{x}^{i^1}, \mathbf{x}^{i^2}, \ldots$ が $\mathbf{x}'$ に収束するものとしましょう．$\epsilon > 0$ が与えられたとき，**すべての** $j \geq j'$ に対して $\|\mathbf{x}^{i^j} - \mathbf{x}'\| < \epsilon$ となるような j' が存在するので，どんな i' (> 0) を ϵ と同時に与えても，$\|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}'\| < \epsilon$ を満たす i が $\{i^j \mid i^j \geq \max\{i', i^{j'}\}\}$ の中に存在します．つまり，$\mathbf{x}'$ は $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$ の極限点です．

(b) 点列 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$ が $\mathbf{x}^0$ のほかに $\mathbf{x}'$ $(\neq \mathbf{x}^0)$ を極限点にもつものと仮定しましょう．$\mathbf{x}^0$ は極限なので，$0 < \epsilon < \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^0\|$ を与えたとき，以下を満足する i^0 が存在します:

$$\begin{aligned}
i \geq i^0 \quad &\Longrightarrow \quad \|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^0\| < \epsilon \\
&\Longrightarrow \quad \|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}'\| - \|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}'\| < \epsilon \quad (\text{三角不等式}) \\
&\Longrightarrow \quad \|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}'\| > \|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}'\| - \epsilon > 0.
\end{aligned}$$

このことは，$\epsilon' = \|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}'\| - \epsilon$ と i^0 を与えても，すべての $i \geq i^0$ に対して $\|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}'\| < \epsilon'$ が満たされないことを意味し，したがって $\mathbf{x}'$ が極限点であることに矛盾します． ■

$\mathbb{R}^n$ の点列 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$ の極限点は，$\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots\}$ を含む $\mathbb{R}^n$ の任意の部分集合 S の集積点となることに注意してください．また逆に，$\mathbf{x}'$ が $S \subset \mathbb{R}^n$ の集積点ならば，S には $\mathbf{x}'$ を極限点とする点列 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$ が含まれます．定理 3.5 (a) に従えば，その中から $\mathbf{x}'$ を極限とする部分点列 $\mathbf{x}^{i^1}, \mathbf{x}^{i^2}, \ldots$ を選ぶこともできます．

下界と上界 (lower and upper bounds):　S を空でない実数の集合とするとき，

$$x \in S \Longrightarrow x \geq \alpha$$

が成り立てば α を S の下界とよび，

$$x \in S \Longrightarrow x \leq \beta$$

が成り立てば β を S の上界とよびます．

下限と上限 (greatest lower and least upper bounds):　S を空でない実数の集合とするとき，その下界 $\overline{\alpha}$ よりも大きな下界が S に存在しなければ，$\overline{\alpha}$ を S の下限とよびます．また，上界 $\overline{\beta}$ よりも小さい上界が S に存在しなければ，$\overline{\beta}$ を S の上限とよびます．つまり，

$$\overline{\alpha} = \inf S \quad \Longleftrightarrow \quad \left\langle \begin{array}{lll} x \in S & \Longrightarrow & x \geq \overline{\alpha} \\ \epsilon > 0 & \Longrightarrow & \exists x \in S \mid \ \overline{\alpha} + \epsilon > x \end{array} \right\rangle$$

$$\overline{\beta} = \sup S \quad \Longleftrightarrow \quad \left\langle \begin{array}{lll} x \in S & \Longrightarrow & x \leq \overline{\beta} \\ \epsilon > 0 & \Longrightarrow & \exists x \in S \mid \ \overline{\beta} - \epsilon < x \end{array} \right\rangle$$

公理．　下界 (上界) をもつ空でない実数の集合はいずれも下限 (上限) をもつ．

集合 S が下限をもたなければ，S は**下に非有界である** (unbounded from below) といい，$\inf S = -\infty$ と書きます．同様に，S が上限をもたなければ，S は**上に非有界である** (unbounded from above) といい，$\sup S = +\infty$ と表します．実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に $\{+\infty, -\infty\}$ を加えて拡張することもありますが，その場合には空でない集合はすべて自明な下限 $-\infty$，上限 $+\infty$ をもちます．また，習慣的に $\inf \emptyset = +\infty$，$\sup \emptyset = -\infty$ という表記も用います．

定理 3.6.　上界 (下界) をもつ非減少な (非増加な) 実数の列には極限がある．

証明:　$x^1, x^2, \ldots$ を有界で非減少な実数の列としましょう．上の公理により，この列には上限 $\overline{\beta}$ が存在します．したがって，

$$\begin{array}{rlll} \epsilon > 0 & \Longrightarrow & \exists i' \mid \ \overline{\beta} - x^{i'} < \epsilon & (\text{上限の定義}) \\ & \Longrightarrow & \overline{\beta} - x^i < \epsilon, \ \ \forall i \geq i' & (\text{非減少性}) \\ & \Longrightarrow & -\epsilon < 0 \leq \overline{\beta} - x^i < \epsilon, \ \ \forall i \geq i' & (\overline{\beta} \geq x^i, \ \ \forall i) \\ & \Longrightarrow & \overline{\beta}\ \text{は}\ x^1, x^2, \ldots\ \text{の極限.} & \end{array}$$

下界をもつ非増加な実数の列の場合も同様に証明できます．■

コーシー列 (Cauchy sequence):　点列 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$ に対して

$$\epsilon > 0 \Longrightarrow \text{すべての}\ j, k \geq i^*\ \text{は}\ \|\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^k\| < \epsilon\ \text{を満たす整数}\ i^* > 0\ \text{が存在する}$$

とき，この点列をコーシー列といいます．

コーシーの収束判定 (Cauchy convergence criterion): 点列 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$ が極限をもてば，その点列はコーシー列です．逆に，$\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$ が「$\mathbb{R}^n$ の」コーシー列であれば，極限に収束します．

3.3 $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合

有界集合 (bounded set): 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ は，任意の $\mathbf{x} \in S$ に対して $\|\mathbf{x}\| \leq \alpha$ を満たす実数 α が存在するとき，有界であるといいます．

集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ は，閉集合で有界の場合にさまざまな興味深い性質をもちます．有界な閉集合を**コンパクト集合** (compact set) とよびますが，計算幾何が対象とする図形の多くもコンパクト集合です．コンパクト集合に関する同値ないくつかの特徴づけを列挙しておきましょう．

定理 3.7. コンパクト集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ は以下の条件を満足する:

(a) S は有界かつ閉である．

(b) S に含まれるすべての点列は S の中に極限点をもつ．

(c) S に関して閉である任意の集合族 S_i $(i \in I)$ に対して

$$\bigcap_{i \in I} S_i = \emptyset \Longrightarrow \exists i_1, i_2, \ldots, i_m \in I \mid \ S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_m} = \emptyset.$$

(d) 任意の開集合族 S_i $(i \in I)$ に対して

$$S \subset \bigcup_{i \in I} S_i \Longrightarrow \exists i_1, i_2, \ldots, i_m \in I \mid \ S \subset S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \cdots \cup S_{i_m}.$$

■

集合のミンコフスキー和 (Minkovski sum of sets): ２つの集合 $S, T \subset \mathbb{R}^n$ のミンコフスキー和は以下で定義されます：

$$S + T = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y},\ \ \mathbf{x} \in S,\ \mathbf{y} \in T\}.$$

集合のスカラー倍 (product of a set with a scalar): 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ の α $(\in \mathbb{R})$ 倍は以下で定義されます:

$$\alpha S = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{z} = \alpha \mathbf{x},\ \ \mathbf{x} \in S\}.$$

例えば，$\alpha = -1$, $S, T \subset \mathbb{R}^n$ とすると $S + \alpha T = S - T$ となります．これが，S に関する T の補集合 $S \setminus T$ ではないことに注意してください．

系 3.8. 集合 S をコンパクト，T は閉集合とする．このとき，$S + T$ は閉集合である．

証明: 点 $\mathbf{z}^0$ を $U = S + T$ の集積点としましょう．すると，U には $\mathbf{z}^0$ に収束する点列 $\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \ldots$ が含まれます．この点列は，S の点列 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$ と T の点列 $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots$ によって

$$\mathbf{z}^i = \mathbf{x}^i + \mathbf{y}^i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

と表せます．S はコンパクトなので，$\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots$ には S の点 $\mathbf{x}^0$ に収束する部分点列 $\mathbf{x}^{i^1}, \mathbf{x}^{i^2}, \ldots$ が含まれます:

$$\lim_{j \to \infty} \mathbf{x}^{i^j} = \mathbf{x}^0 \in S.$$

収束点列の部分点列も収束点列であるので，

$$\lim_{j \to \infty} \mathbf{z}^{i^j} = \mathbf{z}^0.$$

T が閉集合であることから，

$$\lim_{j \to \infty} \mathbf{y}^{i^j} = \mathbf{z}^0 - \mathbf{x}^0 \in T.$$

したがって

$$\mathbf{z}^0 = \mathbf{x}^0 + (\mathbf{z}^0 - \mathbf{x}^0) \in U$$

となって，集積点 $\mathbf{z}^0$ が U に含まれることから，U が閉集合であることがわかります． ■