ガウスの消去法 (例 1) — 前進消去

$$\left|\begin{array}{rrrrrr} x_1 + & 2x_2 - & 2x_3 + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + & 4x_2 - & x_3 - & 3x_4 & = & -1 \\ -2x_1 - & x_2 - & x_3 + & 2x_4 & = & -1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \text{(E1)} \\ \text{(E2)} \\ \text{(E3)} \end{array}$$

$$\updownarrow$$

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(R1)} \\ \text{(R2)} \\ \text{(R3)} \end{array}$$

ガウスの消去法 (例 1) — 前進消去

$$
\left|\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\
2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & -1 \\
-2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -1
\end{array}\right.
\quad
\begin{array}{l}
\text{(E1)} \\ \text{(E2)} \\ \text{(E3)}
\end{array}
$$

$$\updownarrow$$

$$
\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix}
1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\
2 & 4 & -1 & -3 & -1 \\
-2 & -1 & -1 & 2 & -1
\end{bmatrix}
\quad
\begin{array}{l}
\text{(R1)} \\ \text{(R2)} \\ \text{(R3)}
\end{array}
$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 前進消去

$$\left|\begin{array}{rrrrcr} x_1 + & 2x_2 - & 2x_3 + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + & 4x_2 - & x_3 - & 3x_4 & = & -1 \\ -2x_1 - & x_2 - & x_3 + & 2x_4 & = & -1 \end{array}\right.$$

(E1)
(E2) − 2 ∗ (E1)
(E3) + 2 ∗ (E1)

$$\updownarrow$$

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(R1)
(R2) − 2 ∗ (R1)
(R3) + 2 ∗ (R1)

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 前進消去

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 + & 2x_2 - & 2x_3 + & x_4 & = & 0 \\ & & 3x_3 - & 5x_4 & = & -1 \\ & 3x_2 - & 5x_3 + & 4x_4 & = & -1 \end{array}$$

(E1)
(E2) − 2 ∗ (E1)
(E3) + 2 ∗ (E1)

$$\Updownarrow$$

$$\widehat{\mathbf{A}}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

(R1)
(R2) − 2 ∗ (R1)
(R3) + 2 ∗ (R1)

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 前進消去

$$
\left|\begin{array}{rrrrrl}
x_1 + & 2x_2 - & 2x_3 + & x_4 & = & 0 \\
 & & 3x_3 - & 5x_4 & = & -1 \\
 & \boxed{3x_2} - & 5x_3 + & 4x_4 & = & -1
\end{array}\right.
\begin{array}{l}
\text{(E1)} \\ \text{(E2')} \\ \text{(E3')}
\end{array}
$$

$$\updownarrow$$

$$
\widehat{\mathbf{A}}' = \begin{bmatrix}
1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 3 & -5 & -1 \\
0 & \boxed{3} & -5 & 4 & -1
\end{bmatrix}
\begin{array}{l}
\text{(R1)} \\ \text{(R2')} \\ \text{(R3')}
\end{array}
$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 前進消去

$$
\left|\begin{array}{rrrrrrrrr}
x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\
 & & & & 3x_3 & - & 5x_4 & = & -1 \\
 & & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 4x_4 & = & -1
\end{array}\right.
$$

(E1)
(E2')
(E3')

$$\updownarrow$$

$$
\widehat{\mathbf{A}}' = \begin{bmatrix}
1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 3 & -5 & -1 \\
0 & 3 & -5 & 4 & -1
\end{bmatrix}
$$

(R1)
(R2')
(R3')

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 前進消去

$$\left|\begin{array}{rrrrrrrrl} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 4x_4 & = & -1 \\ & & & & 3x_3 & - & 5x_4 & = & -1 \end{array}\right.$$

(E1)
(E3')
(E2') + 0 * (E3')

$$\updownarrow$$

$$\widehat{\mathbf{A}}'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

(R1)
(R3')
(R2') + 0 * (E3')

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j (\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 前進消去

$$\left|\begin{array}{rrrrrrrrr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 4x_4 & = & -1 \\ & & & & 3x_3 & - & 5x_4 & = & -1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \text{(E1)} \\ \text{(E2")} \\ \text{(E3")} \end{array}$$

$$\updownarrow$$

$$\widehat{\mathbf{A}}" = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(R1)} \\ \text{(R2")} \\ \text{(R3")} \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 後退代入

$$
\left|
\begin{array}{rrrrrrrrr}
x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\
 & & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 4x_4 & = & -1 \\
 & & & & \boxed{3x_3} & \boxed{-} & \boxed{5x_4} & \boxed{=} & \boxed{-1}
\end{array}
\right.
\qquad
\begin{array}{l}
\text{(E1)} \\
\text{(E2")} \\
\text{(E3") / 3}
\end{array}
$$

$$\updownarrow$$

$$
\widehat{\mathbf{A}}\text{"} = \begin{bmatrix}
1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 3 & -5 & 4 & -1 \\
0 & 0 & \boxed{3} & \boxed{-5} & \boxed{-1}
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{array}{l}
\text{(R1)} \\
\text{(R2")} \\
\text{(R3") / 3}
\end{array}
$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 後退代入

$$\left|\begin{array}{rrrrrr} x_1 + & 2x_2 - & 2x_3 + & x_4 & = & 0 \\ & 3x_2 - & 5x_3 + & 4x_4 & = & -1 \\ & & \boxed{x_3 - } & \boxed{\frac{5}{3}x_4} & \boxed{=} & \boxed{-\frac{1}{3}} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \text{(E1)} \\ \text{(E2")} \\ \text{(E3}^3\text{)} \end{array}$$

$$\updownarrow$$

$$\widehat{\mathbf{A}}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(R1)} \\ \text{(R2")} \\ \text{(R3}^3\text{)} \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 後退代入

$$
\left|\;
\begin{array}{rrrrrrrrr}
x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\
 & & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 4x_4 & = & -1 \\
 & & & & x_3 & - & \frac{5}{3}x_4 & = & -\frac{1}{3}
\end{array}
\right.
$$

(E1)
(E2") + 5 * (E3³)
(E3³)

$$\updownarrow$$

$$
\widehat{\mathbf{A}}^3 = \begin{bmatrix}
1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 3 & -5 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3}
\end{bmatrix}
$$

(R1)
(R2") + 5 * (R3³)
(R3³)

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 後退代入

$$\left|\begin{array}{rrrrl} x_1 + & 2x_2 - & 2x_3 + & x_4 = & 0 \\ & 3x_2 - & & \frac{13}{3}x_4 = & -\frac{8}{3} \\ & & x_3 - & \frac{5}{3}x_4 = & -\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

(E1)
(E2^3) / 3
(E3^3)

$$\updownarrow$$

$$\widehat{\mathbf{A}}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(R1)
(R2^3) / 3
(R3^3)

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 後退代入

$$
\left|\;\begin{array}{rrrrrrrr}
x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\
 & & x_2 & - & & & \frac{13}{9}x_4 & = & -\frac{8}{9} \\
 & & & & x_3 & - & \frac{5}{3}x_4 & = & -\frac{1}{3}
\end{array}\right.
\qquad
\begin{array}{l}
(\mathrm{E1}) \\ (\mathrm{E2}^4) \\ (\mathrm{E3}^3)
\end{array}
$$

$$\updownarrow$$

$$
\widehat{\mathbf{A}}^5 = \begin{bmatrix}
1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -\frac{13}{9} & -\frac{8}{9} \\
0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3}
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{array}{l}
(\mathrm{R1}) \\ (\mathrm{R2}^4) \\ (\mathrm{R3}^3)
\end{array}
$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 後退代入

$$\left|\begin{array}{rrrrrrrrr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & & & \frac{13}{9}x_4 & = & -\frac{8}{9} \\ & & & & x_3 & - & \frac{5}{3}x_4 & = & -\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

(E1) – 2 ∗ (E2^4) + 2 ∗ (E3^3)
(E2^4)
(E3^3)

$$\updownarrow$$

$$\widehat{\mathbf{A}}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{9} & -\frac{8}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(R1) – 2 ∗ (R2^4) + 2 ∗ (R3^3)
(R2^4)
(R3^3)

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 後退代入

$$\left|\;\boxed{\begin{array}{rcl} x_1 + \qquad\qquad \frac{5}{9}x_4 &=& \frac{10}{9} \\ x_2 - \qquad \frac{13}{9}x_4 &=& -\frac{8}{9} \\ x_3 - \frac{5}{3}x_4 &=& -\frac{1}{3} \end{array}}\right.
\quad \begin{array}{l} \text{(E1')} \\ \text{(E2}^4\text{)} \\ \text{(E3}^3\text{)} \end{array}$$

$$\updownarrow$$

$$\widehat{\mathbf{A}}^6 = \left[\boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{10}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{9} & -\frac{8}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}}\right]
\quad \begin{array}{l} \text{(R1')} \\ \text{(R2}^4\text{)} \\ \text{(R3}^3\text{)} \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j (\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 2) — 前進消去

$$\left|\begin{array}{rrrrrrrrr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 6x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

(E1)
(E2)
(E3)

$$\updownarrow$$

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(R1)
(R2)
(R3)

ガウスの消去法 (例 2) — 前進消去

$$\left|\begin{array}{rrrrrrrrr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 6x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

(E1)
(E2) – 3 ∗ (E1)
(E3) – 2 ∗ (E1)

$$\updownarrow$$

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(R1)
(R2) – 3 ∗ (R1)
(R3) – 2 ∗ (R1)

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 2) — 前進消去

$$\left|\begin{array}{rrrrrr} 2x_1 + & x_2 - & x_3 + & x_4 & = & 1 \\ & & x_3 - & 4x_4 & = & -2 \\ & & x_3 - & 4x_4 & = & -2 \end{array}\right.$$

(E1)
(E2')
(E3')

$$\updownarrow$$

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

(R1)
(R2')
(R3')

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 2) — 前進消去

$$
\left|\begin{array}{rrrrrrrl}
2x_1 + & x_2 - & x_3 + & x_4 & = & 1 & & \text{(E1)} \\
 & & x_3 - & 4x_4 & = & -2 & & \text{(E2')} \\
 & & x_3 - & 4x_4 & = & -2 & & \text{(E3')} - 1 * \text{(E2')}
\end{array}\right.
$$

$$\updownarrow$$

$$
\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{array}{l} \text{(R1)} \\ \text{(R2')} \\ \text{(R3')} - 1 * \text{(R2')} \end{array}
$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 2) — 前進消去

$$
\left|\begin{array}{rrrrrr}
2x_1 + & x_2 - & x_3 + & x_4 & = & 1 \\
 & & x_3 - & 4x_4 & = & -2 \\
 & & & \boxed{0} & \boxed{=} & \boxed{0}
\end{array}\right.
\qquad
\begin{array}{l}
\text{(E1)} \\ \text{(E2')} \\ \text{(E3'')}
\end{array}
$$

$$\updownarrow$$

$$
\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix}
2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0}
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{array}{l}
\text{(R1)} \\ \text{(R2')} \\ \text{(R3'')}
\end{array}
$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 2) — 前進消去

$$\left|\begin{array}{rrrrrrrrr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & & & x_3 & - & 4x_4 & = & -2 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

(E1)
(E2')
(E3")

$$\updownarrow$$

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(R1)
(R2')
(R3")

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 2) — 後退代入

$$\left|\ \begin{array}{rrrrrr} 2x_1 + & x_2 - & x_3 + & x_4 & = & 1 \\ & & x_3 - & 4x_4 & = & -2 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

(E1)
(E2')
(E3")

$$\updownarrow$$

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(R1)
(R2')
(R3")

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 2) — 後退代入

$$\left|\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 + & x_2 - & x_3 + & x_4 & = & 1 \\ & & x_3 - & 4x_4 & = & -2 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

(E1)
(E2')
(E3")

$$\Updownarrow$$

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(R1)
(R2')
(R3")

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 2) — 後退代入

$$\left|\begin{array}{rrrrrrrrr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & & & x_3 & - & 4x_4 & = & -2 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

(E1) + 1 ∗ (E2')
(E2')
(E3")

$$\Updownarrow$$

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(R1) + 1 ∗ (R2')
(R2')
(R3")

行基本変形 **1:** 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 **2:** 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 **3:** 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 2) — 後退代入

$$
\left|\boxed{\begin{array}{rrrrrr} 2x_1 + & x_2 & & - & 3x_4 & = & -1 \\ & & x_3 & - & 4x_4 & = & -2 \end{array}} \right.
$$
$$
\qquad 0 = 0
$$

(E1') / 2
(E2')
(E3")

$$\updownarrow$$

$$
\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

(R1') / 2
(R2')
(R3")

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j (\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 2) — 後退代入

$$\left|\ \boxed{\begin{array}{rrrrl} x_1 + \frac{1}{2}x_2 & & - \frac{3}{2}x_4 & = & -\frac{1}{2} \\ & x_3 & - 4x_4 & = & -2 \end{array}}\right.$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0$$

(E1")
(E2')
(E3")

$$\updownarrow$$

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(R1")
(R2')
(R3")

行基本変形 **1:** 第 i 行に第 $j (\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 **2:** 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 **3:** 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 3) — 前進消去

$$\left|\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 + & x_2 - & x_3 + & x_4 & = & 1 \\ 6x_1 + & 3x_2 - & 2x_3 - & x_4 & = & 1 \\ 4x_1 + & 2x_2 - & x_3 - & 2x_4 & = & 1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \text{(E1)} \\ \text{(E2)} \\ \text{(E3)} \end{array}$$

$$\updownarrow$$

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{(R1)} \\ \text{(R2)} \\ \text{(R3)} \end{array}$$

ガウスの消去法 (例 3) — 前進消去

$$\left|\begin{array}{rrrrrrrrr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 6x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

(E1)
(E2) – 3 $*$ (E1)
(E3) – 2 $*$ (E1)

$$\updownarrow$$

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(R1)
(R2) – 3 $*$ (R1)
(R3) – 2 $*$ (R1)

行基本変形 **1:** 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 **2:** 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 **3:** 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 3) — 前進消去

$$
\left|\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\
 & & & & x_3 & - & 4x_4 & = & -2 \\
 & & & & x_3 & - & 4x_4 & = & -1
\end{array}\right.
\qquad
\begin{array}{l}
\text{(E1)} \\
\text{(E2')} \\
\text{(E3')}
\end{array}
$$

$$\updownarrow$$

$$
\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix}
2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\
0 & 0 & 1 & -4 & -1
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{array}{l}
\text{(R1)} \\
\text{(R2')} \\
\text{(R3')}
\end{array}
$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 3) — 前進消去

$$
\left|\begin{array}{rrrrrrrl}
2x_1 + & x_2 - & x_3 + & x_4 & = & 1 & & \text{(E1)} \\
& & x_3 - & 4x_4 & = & -2 & & \text{(E2')} \\
& & x_3 - & 4x_4 & = & -1 & & \text{(E3')} - 1 * \text{(E2')}
\end{array}\right.
$$

$$\updownarrow$$

$$
\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}
\quad
\begin{array}{l} \text{(R1)} \\ \text{(R2')} \\ \text{(R3')} - 1 * \text{(R2')} \end{array}
$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 3) — 前進消去

$$
\left|\begin{array}{rrrrrl}
2x_1 + & x_2 - & x_3 + & x_4 & = & 1 \\
 & & x_3 - & 4x_4 & = & -2 \\
 & & & 0 & = & 1
\end{array}\right.
\quad
\begin{array}{l}
\text{(E1)} \\ \text{(E2')} \\ \text{(E3'')}
\end{array}
$$

$$\updownarrow$$

$$
\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix}
2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\quad
\begin{array}{l}
\text{(R1)} \\ \text{(R2')} \\ \text{(R3'')}
\end{array}
$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 3) — 前進消去

$$
\left|
\begin{array}{rrrrrr}
2x_1 + & x_2 - & x_3 + & x_4 & = & 1 \\
 & & x_3 - & 4x_4 & = & -2 \\
 & & & 0 & = & 1
\end{array}
\right.
\qquad
\begin{array}{l}
\text{(E1)} \\
\text{(E2')} \\
\text{(E3'')}
\end{array}
$$

$$\updownarrow$$

$$
\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix}
2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{array}{l}
\text{(R1)} \\
\text{(R2')} \\
\text{(R3'')}
\end{array}
$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

行基本変形と基本行列

$$\mathbf{P}(i,j;c) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \mathbf{O} & \\ & & 1 & \cdots & c & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & \mathbf{O} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & & j & & \end{array} & \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

$$\mathbf{P}(i,j;c)\widehat{\mathbf{A}}$$

行基本変形と基本行列

$$
\mathbf{Q}(i;c) = \begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & \mathbf{O} & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & c & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & \mathbf{O} & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} &
\end{array}
$$

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

$$\mathbf{Q}(i;c)\widehat{\mathbf{A}}$$

行基本変形と基本行列

$$
\mathbf{R}(i,j) = \begin{array}{cc}
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & \mathbf{O} & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & \mathbf{O} & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right] &
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\
\end{array} \\
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & i & & & & j & & &
\end{array} &
\end{array}
$$

行基本変形 **3:** 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

$$\mathbf{R}(i,j)\widehat{\mathbf{A}}$$

ガウスの消去法 (例 1) — 前進消去

$$
\left|\begin{array}{rrrrrr}
x_1 + & 2x_2 - & 2x_3 + & x_4 & = & 0 \\
2x_1 + & 4x_2 - & x_3 - & 3x_4 & = & -1 \\
-2x_1 - & x_2 - & x_3 + & 2x_4 & = & -1
\end{array}\right.
$$

$$\updownarrow$$

$$
\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix}
1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\
2 & 4 & -1 & -3 & -1 \\
-2 & -1 & -1 & 2 & -1
\end{bmatrix}
$$

ガウスの消去法 (例 1) — 前進消去

$$
\left|\begin{array}{rrrrrr}
x_1 + & 2x_2 - & 2x_3 + & x_4 & = & 0 \\
 & & 3x_3 - & 5x_4 & = & -1 \\
 & 3x_2 - & 5x_3 + & 4x_4 & = & -1
\end{array}\right.
$$

$$\updownarrow$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{A}}' &= \mathbf{P}(3,1;2)\mathbf{P}(2,1;-2)\widehat{\mathbf{A}} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 前進消去

$$
\left|\begin{array}{rrrrrrrrr}
x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\
 & & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 4x_4 & = & -1 \\
 & & & & 3x_3 & - & 5x_4 & = & -1
\end{array}\right.
$$

$$\updownarrow$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{A}}'' &= \mathbf{R}(2,3)\mathbf{P}(3,1;2)\mathbf{P}(2,1;-2)\widehat{\mathbf{A}} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 後退代入

$$\left|\begin{array}{rrrrrrrrr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 4x_4 & = & -1 \\ & & & & x_3 & - & \frac{5}{3}x_4 & = & -\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{A}}^3 &= \mathbf{Q}(3;1/3)\mathbf{R}(2,3)\mathbf{P}(3,1;2)\mathbf{P}(2,1;-2)\widehat{\mathbf{A}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 後退代入

$$\left|\begin{array}{rrrrcr} x_1 + & 2x_2 - & 2x_3 + & x_4 & = & 0 \\ & 3x_2 - & & \frac{13}{3}x_4 & = & -\frac{8}{3} \\ & & x_3 - & \frac{5}{3}x_4 & = & -\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{A}}^4 &= \mathbf{P}(2,3;5)\mathbf{Q}(3;1/3)\mathbf{R}(2,3)\mathbf{P}(3,1;2)\mathbf{P}(2,1;-2)\widehat{\mathbf{A}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 後退代入

$$\left|\begin{array}{rrrrrrrrr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & & & \frac{13}{9}x_4 & = & -\frac{8}{9} \\ & & & & x_3 & - & \frac{5}{3}x_4 & = & -\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{A}}^5 &= \mathbf{Q}(2;1/3)\mathbf{P}(2,3;5)\mathbf{Q}(3;1/3)\mathbf{R}(2,3)\mathbf{P}(3,1;2)\mathbf{P}(2,1;-2)\widehat{\mathbf{A}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{9} & -\frac{8}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 後退代入

$$\left|\begin{array}{rrrrcr} x_1 + & & & \frac{5}{9}x_4 & = & \frac{10}{9} \\ & x_2 - & & \frac{13}{9}x_4 & = & -\frac{8}{9} \\ & & x_3 - & \frac{5}{3}x_4 & = & -\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{A}}^6 &= \mathbf{P}(1,3;2)\mathbf{P}(1,2;-2)\mathbf{Q}(2;1/3)\mathbf{P}(2,3;5)\mathbf{Q}(3;1/3)\mathbf{R}(2,3)\mathbf{P}(3,1;2)\mathbf{P}(2,1;-2)\widehat{\mathbf{A}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{10}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{9} & -\frac{8}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j(\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.