

ガウスの消去法 (例 1) — 前進消去

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \quad (\text{E1}) \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = -1 \quad (\text{E2}) \\ -2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \quad (\text{E3}) \end{array}$$

↕

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (\text{R1}) \\ (\text{R2}) \\ (\text{R3}) \end{array}$$

ガウスの消去法 (例 1) — 前進消去

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 & \text{(E1)} \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = -1 & \text{(E2)} \\ -2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 & \text{(E3)} \end{array}$$

↕

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{array}{r} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{(R1)} \\ \text{(R2)} \\ \text{(R3)} \end{array} \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 前進消去

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \quad (\text{E1}) \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = -1 \quad (\text{E2}) - 2 * (\text{E1}) \\ -2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \quad (\text{E3}) + 2 * (\text{E1}) \end{array}$$

↓

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (\text{R1}) \\ (\text{R2}) - 2 * (\text{R1}) \\ (\text{R3}) + 2 * (\text{R1}) \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 前進消去

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 & \text{(E1)} \\ 3x_3 - 5x_4 = -1 & \text{(E2) - 2 * (E1)} \\ 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -1 & \text{(E3) + 2 * (E1)} \end{array}$$

↓

$$\hat{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{(R1)} \\ \text{(R2) - 2 * (R1)} \\ \text{(R3) + 2 * (R1)} \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える。

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける。

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える。

ガウスの消去法 (例 1) — 前進消去

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \quad (\text{E1})$$

$$3x_3 - 5x_4 = -1 \quad (\text{E2}')$$

$$3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -1 \quad (\text{E3}')$$

↓

$$\hat{\mathbf{A}}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (\text{R1}) \\ (\text{R2}') \\ (\text{R3}') \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 前進消去

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 & (E1) \\ \circ & 3x_3 - 5x_4 = -1 & (E2') \\ 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -1 & (E3') \end{array}$$

↓

$$\hat{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (R1) \\ (R2') \\ (R3') \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 前進消去

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 & & \text{(E1)} \\ 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -1 & & \text{(E3')} \\ - 3x_3 - 5x_4 = -1 & & \text{(E2')} + 0 * \text{(E3')} \end{array}$$

↓

$$\hat{\mathbf{A}}'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{(R1)} \\ \text{(R3')} \\ \text{(R2')} + 0 * \text{(E3')} \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 前進消去

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \quad (\text{E1})$$

$$3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -1 \quad (\text{E2''})$$

$$3x_3 - 5x_4 = -1 \quad (\text{E3''})$$

↓

$$\hat{\mathbf{A}}'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (\text{R1}) \\ (\text{R2''}) \\ (\text{R3''}) \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 後退代入

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 & \text{(E1)} \\ 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -1 & \text{(E2'')} \\ \boxed{3x_3 - 5x_4 = -1} & \text{(E3'') / 3} \end{array}$$

↓

$$\hat{\mathbf{A}}'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{(R1)} \\ \text{(R2'')} \\ \text{(R3'') / 3} \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 後退代入

$$\begin{array}{rcll} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 & = & 0 & \text{(E1)} \\ 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 & = & -1 & \text{(E2'')} \\ x_3 - \frac{5}{3}x_4 & = & -\frac{1}{3} & \text{(E3}^3\text{)} \end{array}$$

↓

$$\hat{\mathbf{A}}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{(R1)} \\ \text{(R2'')} \\ \text{(R3}^3\text{)} \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 後退代入

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 & (E1) \\ 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -1 & (E2'') + 5 * (E3^3) \\ x_3 - \frac{5}{3}x_4 = -\frac{1}{3} & (E3^3) \end{array}$$



$$\hat{\mathbf{A}}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{array}{l} (R1) \\ (R2'') + 5 * (R3^3) \\ (R3^3) \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j (\neq i)$ 行のスカラー倍を加える。

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける。

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える。

ガウスの消去法 (例 1) — 後退代入

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 & (E1) \\ 3x_2 - - \frac{13}{3}x_4 = -\frac{8}{3} & (E2^3) / 3 \\ - - \frac{5}{3}x_4 = -\frac{1}{3} & (E3^3) \end{array}$$

↓

$$\hat{\mathbf{A}}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{array}{l} (R1) \\ (R2^3) / 3 \\ (R3^3) \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 後退代入

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 & (E1) \\ x_2 - \frac{13}{9}x_4 = -\frac{8}{9} & (E2^4) \\ x_3 - \frac{5}{3}x_4 = -\frac{1}{3} & (E3^3) \end{array}$$

↓

$$\hat{\mathbf{A}}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{9} & -\frac{8}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{array}{l} (R1) \\ (R2^4) \\ (R3^3) \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 後退代入

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_2 - \frac{13}{9}x_4 & = & -\frac{8}{9} \\ x_3 - \frac{5}{3}x_4 & = & -\frac{1}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} (E1) - 2 * (E2^4) + 2 * (E3^3) \\ (E2^4) \\ (E3^3) \end{array}$$

↕

$$\hat{\mathbf{A}}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{9} & -\frac{8}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (R1) - 2 * (R2^4) + 2 * (R3^3) \\ (R2^4) \\ (R3^3) \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える。

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける。

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える。

ガウスの消去法 (例 1) — 後退代入

$$\begin{array}{rcl} x_1 + & & \frac{5}{9}x_4 = \frac{10}{9} & (E1') \\ & x_2 - & \frac{13}{9}x_4 = -\frac{8}{9} & (E2^4) \\ & & x_3 - & \frac{5}{3}x_4 = -\frac{1}{3} & (E3^3) \end{array}$$

↕

$$\hat{\mathbf{A}}^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{10}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{9} & -\frac{8}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{array}{l} (R1') \\ (R2^4) \\ (R3^3) \end{array}$$

行基本変形 **1**: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 **2**: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 **3**: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 2) — 前進消去

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 & \text{(E1)} \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 & \text{(E2)} \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 & \text{(E3)} \end{cases}$$

↕

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{(R1)} \\ \text{(R2)} \\ \text{(R3)} \end{array}$$

ガウスの消去法 (例 2) — 前進消去

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \quad (\text{E1}) \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \quad (\text{E2}) - 3 * (\text{E1}) \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \quad (\text{E3}) - 2 * (\text{E1}) \end{array}$$

↕

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (\text{R1}) \\ (\text{R2}) - 3 * (\text{R1}) \\ (\text{R3}) - 2 * (\text{R1}) \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える。

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける。

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える。

ガウスの消去法 (例 2) — 前進消去

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \quad (\text{E1}) \\ x_3 - 4x_4 = -2 \quad (\text{E2}') \\ x_3 - 4x_4 = -2 \quad (\text{E3}') \end{array} \right.$$

↓

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (\text{R1}) \\ (\text{R2}') \\ (\text{R3}') \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 2) — 前進消去

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \quad (\text{E1}) \\ x_3 - 4x_4 = -2 \quad (\text{E2}') \\ x_3 - 4x_4 = -2 \quad (\text{E3}') - 1 * (\text{E2}') \end{array} \right.$$



$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (\text{R1}) \\ (\text{R2}') \\ (\text{R3}') - 1 * (\text{R2}') \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える。

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける。

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える。

ガウスの消去法 (例 2) — 前進消去

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \quad (\text{E1}) \\ x_3 - 4x_4 = -2 \quad (\text{E2}') \\ 0 = 0 \quad (\text{E3}'') \end{array} \right.$$

↓

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (\text{R1}) \\ (\text{R2}') \\ (\text{R3}'') \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 2) — 前進消去

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \quad (\text{E1})$$

$$x_3 - 4x_4 = -2 \quad (\text{E2}')$$

$$0 = 0 \quad (\text{E3}''')$$



$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (\text{R1}) \\ (\text{R2}') \\ (\text{R3}''') \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 2) — 後退代入

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 1 \quad (\text{E1}) \\ & & x_3 - 4x_4 = -2 \quad (\text{E2}') \\ & & 0 = 0 \quad (\text{E3}'') \end{array}$$

↓

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{array}{r} \left[\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} (\text{R1}) \\ (\text{R2}') \\ (\text{R3}'') \end{array} \end{array}$$

行基本変形 **1**: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える。

行基本変形 **2**: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける。

行基本変形 **3**: 第 i 行と第 j 行を入れ替える。

ガウスの消去法 (例 2) — 後退代入

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \quad (\text{E1}) \\ x_3 - 4x_4 = -2 \quad (\text{E2}') \\ 0 = 0 \quad (\text{E3}'') \end{array} \right.$$

↓

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (\text{R1}) \\ (\text{R2}') \\ (\text{R3}'') \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 2) — 後退代入

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_3 - 4x_4 & = & -2 \\ 0 & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} (E1) + 1 * (E2') \\ (E2') \\ (E3'') \end{array}$$



$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (R1) + 1 * (R2') \\ (R2') \\ (R3'') \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j (\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 2) — 後退代入

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - 3x_4 = -1 & & (E1') / 2 \\ x_3 - 4x_4 = -2 & & (E2') \\ 0 = 0 & & (E3'') \end{array}$$



$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (R1') / 2 \\ (R2') \\ (R3'') \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 2) — 後退代入

$$\begin{array}{rcl} x_1 + \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{3}{2}x_4 = -\frac{1}{2} & \text{(E1'')} \\ & & x_3 - 4x_4 = -2 & \text{(E2')} \\ & & 0 = 0 & \text{(E3'')} \end{array}$$

↕

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{(R1'')} \\ \text{(R2')} \\ \text{(R3'')} \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 3) — 前進消去

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 & \text{(E1)} \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 & \text{(E2)} \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 & \text{(E3)} \end{cases}$$

↕

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{(R1)} \\ \text{(R2)} \\ \text{(R3)} \end{matrix}$$

ガウスの消去法 (例 3) — 前進消去

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \quad (\text{E1}) \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \quad (\text{E2}) - 3 * (\text{E1}) \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \quad (\text{E3}) - 2 * (\text{E1}) \end{array}$$

↕

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (\text{R1}) \\ (\text{R2}) - 3 * (\text{R1}) \\ (\text{R3}) - 2 * (\text{R1}) \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える。

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける。

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える。

ガウスの消去法 (例 3) — 前進消去

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \quad (\text{E1}) \\ x_3 - 4x_4 = -2 \quad (\text{E2}') \\ x_3 - 4x_4 = -1 \quad (\text{E3}') \end{array} \right.$$

↓

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (\text{R1}) \\ (\text{R2}') \\ (\text{R3}') \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 3) — 前進消去

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \quad (\text{E1}) \\ x_3 - 4x_4 = -2 \quad (\text{E2}') \\ x_3 - 4x_4 = -1 \quad (\text{E3}') - 1 * (\text{E2}') \end{array} \right.$$

↓

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (\text{R1}) \\ (\text{R2}') \\ (\text{R3}') - 1 * (\text{R2}') \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j (\neq i)$ 行のスカラー倍を加える。

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける。

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える。

ガウスの消去法 (例 3) — 前進消去

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 & \text{(E1)} \\ x_3 - 4x_4 = -2 & \text{(E2')} \\ 0 = 1 & \text{(E3'')} \end{cases}$$

↓

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{(R1)} \\ \text{(R2')} \\ \text{(R3'')} \end{matrix}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 3) — 前進消去

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \quad (\text{E1})$$

$$x_3 - 4x_4 = -2 \quad (\text{E2}')$$

$$0 = 1 \quad (\text{E3}''')$$



$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (\text{R1}) \\ (\text{R2}') \\ (\text{R3}''') \end{array}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

行基本変形と基本行列

$$\mathbf{P}(i, j; c) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & & & \\ & & & \ddots & & & \\ \mathbf{O} & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

行基本変形 **1**: 第 i 行に第 $j (\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

$$\mathbf{P}(i, j; c)\hat{\mathbf{A}}$$

行基本変形と基本行列

$$Q(i; c) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

The matrix $Q(i; c)$ is a square matrix with 1s on the main diagonal and 0s elsewhere. The element at the intersection of the i -th row and i -th column is c . Red arrows point from the labels i to the i -th row and i -th column.

行基本変形 **2**: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

$$Q(i; c)\hat{A}$$

行基本変形と基本行列

$$\mathbf{R}(i, j) = \begin{bmatrix}
 1 & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
 \end{bmatrix}$$

The diagram illustrates the matrix $\mathbf{R}(i, j)$ with two columns, i and j , highlighted by cyan arrows. The matrix is an identity matrix with the rows i and j swapped. In the original image, the row labels i and j are written in blue.

行基本変形 **3**: 第 i 行と第 j 行を入れ替える。

$$\mathbf{R}(i, j)\hat{\mathbf{A}}$$

ガウスの消去法 (例 1) — 前進消去

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = -1 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

↕

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ガウスの消去法 (例 1) — 前進消去

$$\left| \begin{array}{cccc} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_3 - 5x_4 = -1 \\ 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -1 \end{array} \right.$$

↓

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}' &= \mathbf{P}(3, 1; 2)\mathbf{P}(2, 1; -2)\hat{\mathbf{A}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 前進消去

$$\left| \begin{array}{cccc} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_3 - 5x_4 = -1 \end{array} \right.$$

↑

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}'' &= \mathbf{R}(2, 3)\mathbf{P}(3, 1; 2)\mathbf{P}(2, 1; -2)\hat{\mathbf{A}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 $j (\neq i)$ 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 後退代入

$$\left| \begin{array}{cccc} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -1 \\ x_3 - \frac{5}{3}x_4 = -\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

↑

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}^3 &= \mathbf{Q}(3; 1/3)\mathbf{R}(2, 3)\mathbf{P}(3, 1; 2)\mathbf{P}(2, 1; -2)\hat{\mathbf{A}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 後退代入

$$\left| \begin{array}{cccc} x_1 + & 2x_2 - & 2x_3 + & x_4 = & 0 \\ & 3x_2 - & & \frac{13}{3}x_4 = & -\frac{8}{3} \\ & & x_3 - & \frac{5}{3}x_4 = & -\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

↑

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}^4 &= \mathbf{P}(2, 3; 5)\mathbf{Q}(3; 1/3)\mathbf{R}(2, 3)\mathbf{P}(3, 1; 2)\mathbf{P}(2, 1; -2)\hat{\mathbf{A}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 後退代入

$$\left| \begin{array}{cccc} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{13}{9}x_4 = -\frac{8}{9} \\ x_3 - \frac{5}{3}x_4 = -\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

↑

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}^5 &= \mathbf{Q}(2; 1/3)\mathbf{P}(2, 3; 5)\mathbf{Q}(3; 1/3)\mathbf{R}(2, 3)\mathbf{P}(3, 1; 2)\mathbf{P}(2, 1; -2)\hat{\mathbf{A}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{9} & -\frac{8}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.

ガウスの消去法 (例 1) — 後退代入

$$\left| \begin{array}{rcl} x_1 + & & \frac{5}{9}x_4 = \frac{10}{9} \\ & x_2 - & \frac{13}{9}x_4 = -\frac{8}{9} \\ & & x_3 - \frac{5}{3}x_4 = -\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

↓

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{A}}^6 &= \mathbf{P}(1, 3; 2)\mathbf{P}(1, 2; -2)\mathbf{Q}(2; 1/3)\mathbf{P}(2, 3; 5)\mathbf{Q}(3; 1/3)\mathbf{R}(2, 3)\mathbf{P}(3, 1; 2)\mathbf{P}(2, 1; -2)\widehat{\mathbf{A}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{10}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{9} & -\frac{8}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

行基本変形 1: 第 i 行に第 j ($\neq i$) 行のスカラー倍を加える.

行基本変形 2: 第 i 行にゼロでないスカラーを掛ける.

行基本変形 3: 第 i 行と第 j 行を入れ替える.