発表年	開発者	計算量
1956	Ford and Fulkerson	$O(nmU)$
1969	Edmonds and Karp	$O(nm^2)$
1970	Dinic	$O(n^2m)$
1974	Karzanov	$O(n^3)$
1977	Cherkasky	$O(n^2\sqrt{m})$
1978	Shiloach	$O(nm\log^2 n)$
1979	Galil and Naamad	$O(nm\log^2 n)$
1980	Galil	$O(n^{5/3}m^{2/3})$
1983	Sleator and Tarjan	$O(nm\log n)$
1985	Gabow	$O(nm\log U)$
1986	Goldberg and Tarjan	$O(nm\log(n^2/m))$
1987	Ahuja and Orlin	$O(nm + n^2\log U)$
1987	Ahuja, Orlin and Tarjan	$O\left(nm\log\left(\frac{n\log U}{m\log\log U}+2\right)\right)$
1988	Ahuja, Orlin and Tarjan	$O\left(nm\log\left(\frac{n\sqrt{\log U}}{m}+2\right)\right)$

が $O(nm^2)$ で，4.3 節で示した $O(n^3m)$ よりも疎なネットワークに対して有利となっているが，これは関数 SHORTEST_PATH に**先入れ先出しリスト** (first-in first-out list) を用いることで比較的簡単に実現できる．

強多項式時間アルゴリズムとしては，今のところ Goldberg and Tarjan [5] による $O(nm\log(n^2/m))$ の予備流押し出し法が最速である．並列計算に有利な点と相まって最近では増量可能路法よりも人気が高いが，その詳細については名著 Ahuja, *et al.*[1,2] を参照のこと．

[1] R.K. Ahuja, T.L. Magnanti and J.B. Orlin, “Network flows”, in: G.L. Nemhauser, A.H.G. Rinnooy Kan and M.J. Todd eds., *Optimization* (North-Holland, 1989), 211 – 369.

[2] R.K. Ahuja, T.L. Magnanti and J.B. Orlin, *Network Flows — Theory, Algorithms, and Applications* (Prentice Hall, 1993).

[3] J. Edmonds and R.M. Karp, “Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems”, *Journal of ACM* **19** (1972), 248 – 264.

[4] L.R. Ford and D.R. Fullkerson, *Flows in Networks* (Princeton University Press, 1962).

[5] A.V. Goldberg and R.E. Tarjan, “A new approach to the maximum flow problem”, *Proc. 18th ACM simp. on the Theory of Comput.* (1986), 136 – 146.

日本語で書かれた教科書にも最大流問題と増量可能路法は必ず登場するが，その強多項式時間性まで解説してあるものは多くない:

[6] 伊理 正夫, 藤重 悟, 大山 達雄, グラフ・ネットワーク・マトロイド(産業図書, 1986).

5　最小費用流問題

いよいよ最小費用流問題である．有向グラフ $G = (V, E)$ の各枝 $(i, j) \in E$ には容量 u_{ij} だけでなく，費用 c_{ij} も与えられる．このネットワーク上で，流れ $\mathbf{x} = (x_{ij})$ にかかる総費用 $\sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$ を最小化するのが問題の目的で，次のように定式化される:

$$\left|\begin{array}{lll} \text{最小化} & \displaystyle\sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} & \\ \text{条　件} & \displaystyle\sum_{\{j|(i,j)\in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i)\in E\}} x_{ji} = b_i, & \forall i \in V \\ & 0 \le x_{ij} \le u_{ij}, & \forall (i,j) \in E. \end{array}\right. \tag{5.1}$$

最大流問題とは異なり，複数の入口や出口が許され，各頂点 i は，$b_i > 0$ ならば供給点，つまり入口で，$b_i < 0$ ならば需要点，出口となる．これまで通り，定数はすべて整数で，$\mathbf{c} = (c_{ij})$ と $\mathbf{u} = (u_{ij})$ は非負であることを仮定し，また

$$\begin{aligned} C &= \max\{c_{ij} \mid (i,j) \in E\} \\ U &= \max\{\max\{|b_i| \mid i \in N\},\ \max\{u_{ij} \mid (i,j) \in E \text{ かつ } u_{ij} < \infty\} \end{aligned}$$

と表す．さらに本節では，(5.1) が次の条件を満足するものとする:

実行可能性.　総供給量と総需要量が等しい，つまり

$$\sum_{i\in V} b_i = 0$$

が成り立ち，かつ (5.1) には実行可能解が存在する．

連結性.　グラフ G の任意の頂点対間には有向路 $\pi \subset E$ が存在する．

与えられた問題 (5.1) に実行可能解が存在するか否かは，最大流問題を 1 題解くことで確認できる．まず，グラフ $G = (V, E)$ に入口頂点 s と出口 t を新たに導入し，各頂点 $i \in V$ に対して

- $b_i > 0$ ならば枝 (s, i) を加え，その容量を b_i とする;
- $b_i < 0$ ならば枝 (i, t) を加え，その容量を $-b_i$ とする．

この結果得られる補助ネットワーク上で人工頂点 s から t への最大流を求める．もしも最大流が $\sum_{i\in V|b_i>0} b_i$ に等しければ (5.1) は実行可能であり，これが成り立たなければ実行不可能である．連結性の方は，各頂点 $j \in V$ に対して

- 枝 $(1, j)$ と (j, i) を加え，その費用，容量ともに $+\infty$ とする

ことで，一般性を失うことなく，任意のネットワークに対して成り立たせることができる．もとのネットワークに最小費用流が存在すれば，人工的に加えられたこれらの枝を使わないで済むことは明らかであろう．

5.1　残余ネットワークと最適性条件

最小費用流問題のアルゴリズムにおいても，残余ネットワークは再び主要な役割を演じる．最大流問題のときと異なるのは，残余ネットワークの各枝にも費用が定義される点である．

残余ネットワーク． 問題 (5.1) の実行可能流 $\mathbf{x} = (x_{ij})$ に対し，残余ネットワークの各枝は次の規則で定義される:

(a)　$u_{ij} - x_{ij} > 0$ ならば $(i,j) \in E(\mathbf{x})$ とし，費用を $c'_{ij} = c_{ij}$，容量を $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$ とする．

(b)　$x_{ij} > 0$ ならば $(j,i) \in E(\mathbf{x})$ とし，費用を $c'_{ji} = -c_{ij}$，容量を $r_{ji} = x_{ij}$ とする．

こうして得られる有向グラフ $G(\mathbf{x}) = (V, E(\mathbf{x}))$ と費用 $\mathbf{c}' = (c'_{ij})$，容量 $\mathbf{r} = (r_{ij})$ を合わせて残余ネットワークとよび，$N(\mathbf{x})$ で表す.

最小費用流問題の解法に関する議論を始める前に，この残余ネットワーク $N(\mathbf{x})$ の性質を少し見てみることにしよう．

いま，問題 (5.1) の適当な実行可能流 $\mathbf{x}^*$ が得られているものとしよう．このとき，(5.1) の流れ $\mathbf{x}$ はすべて $\mathbf{x}^*$ に関する残余ネットワーク $N(\mathbf{x}^*)$ 上の流れ $\mathbf{x}'$ に対応させることができる．それには，まず各枝 $(i,j) \in E$ に対して

$$x_{ij} - x^*_{ij} \geq 0 \quad \text{ならば} \quad x'_{ij} = x_{ij} - x^*_{ij},\ \ x'_{ji} = 0 \tag{5.2}$$

$$x_{ij} - x^*_{ij} < 0 \quad \text{ならば} \quad x'_{ij} = 0,\ \ x'_{ji} = x^*_{ij} - x_{ij} \tag{5.3}$$

と定義する．すると (5.2) の場合には

$$0 \leq x'_{ij} \leq u_{ij} - x^*_{ij} = r_{ij}$$

が成り立ち，また (5.3) の場合には

$$0 \leq x'_{ji} \leq x^*_{ij} = r_{ji}$$

となって，$\mathbf{x}' = (x'_{ij})$ は $N(\mathbf{x}^*)$ の容量条件をすべて満足する[1]．

次に (5.1) の流れ $\mathbf{x}$ の費用と，対応する $N(\mathbf{x}^*)$ の流れ $\mathbf{x}'$ の費用の関係を調べてみよう．元のネットワークの枝 (i,j) 上の流れ x_{ij} に対して $N(\mathbf{x}^*)$ の枝 (i,j)，および (j,i) 上の流れの費用は，

$$c'_{ij}x'_{ij} + c'_{ji}x'_{ji} = c_{ij}(x'_{ij} - x'_{ji}) = c_{ij}x_{ij} - c_{ij}x^*_{ij}$$

となる．逆に，$\mathbf{x}'$ が残余ネットワーク $N(\mathbf{x}^*)$ 上の流れとして与えられれば，各枝 $(i,j) \in E$ に対して

[1] ただし，$(i,j) \notin E(\mathbf{x}^*)$ のときは $r_{ij} = 0$ と見なす.

$$x_{ij} = (x'_{ij} - x'_{ji}) + x^*_{ij}$$

とすることで (5.1) の実行可能解 $\mathbf{x} = (x_{ij})$ を得ることができる．さらに，２つの実行可能流 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}^*$ の費用に対して

$$\mathbf{cx} = \mathbf{c}'\mathbf{x} + \mathbf{cx}^*$$

の関係が成り立つ．以上の観察から，次の補題が導かれる:

補題 5.1. 問題 (5.1) の適当な実行可能流を $\mathbf{x}^*$ とする．流れ $\mathbf{x}$ が実行可能である必要十分条件は，(5.2), (5.3) によって定義される流れ $\mathbf{x}'$ が残余ネットワーク $N(\mathbf{x}^*)$ 上で実行可能なことである．また，このとき $\mathbf{cx} = \mathbf{c}'\mathbf{x}' + \mathbf{cx}^*$ が成り立つ．

さて，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}^*$ がともに実行可能流であるとすれば当然，任意の頂点 $i \in V$ に対して

$$\sum_{\{j|(i,j)\in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i)\in E\}} x_{ji} = b_i, \qquad \sum_{\{j|(i,j)\in E\}} x^*_{ij} - \sum_{\{j|(j,i)\in E\}} x^*_{ji} = b_i$$

が成り立つ．辺々の差を取れば，

$$\begin{aligned}&\sum_{\{j|(i,j)\in E\}} (x_{ij} - x^*_{ij}) - \sum_{\{j|(j,i)\in E\}} (x_{ji} - x^*_{ji}) \\ &\quad = \sum_{\{j|(i,j)\in E(\mathbf{x}^*)\}} x'_{ij} - \sum_{\{j|(j,i)\in E(\mathbf{x}^*)\}} x'_{ji} = 0\end{aligned}$$

となって $\mathbf{x}'$ は残余ネットワーク $N(\mathbf{x}^*)$ に入口も出口も持たないことがわかる．言い換えると，$\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ であれば，$\mathbf{x}$ に対応する $N(\mathbf{x}^*)$ 上の流れ $\mathbf{x}'$ はいくつかの有向閉路上の流れに分解できる．そうした閉路 $\theta \in E(\mathbf{x}^*)$ の中で $\sum_{(i,j)\in\theta} < 0$ となるものを**負の有向閉路** (negative cycle) とよぶことにしよう．

定理 5.2. 実行可能流 $\mathbf{x}^*$ が最小費用流問題 (5.1) の最適流である必要十分条件は，残余ネットワーク $N(\mathbf{x}^*)$ が負の有向閉路を含まないことである．

証明: まず，実行可能流 $\mathbf{x}^*$ に対して $N(\mathbf{x}^*)$ に負の有向閉路 θ が存在するものとしよう．この場合，θ に沿って流れを増加させることで目的関数値を減少できるので，$\mathbf{x}^*$ は最適流ではない．

次に，$N(\mathbf{x}^*)$ に負の有向閉路が存在しないものとし，$\mathbf{x}^\circ$ を $\mathbf{x}^\circ \neq \mathbf{x}^*$ なる最適流としよう．すでに見たように $\mathbf{x}^\circ$ に対応する $N(\mathbf{x}^*)$ の流れ $\mathbf{x}'$ は，費用が $\mathbf{c}'\mathbf{x}' = \mathbf{cx}^\circ - \mathbf{cx}^*$ で，かつ複数の有向閉路に分解できる．ところが，そのいずれも負の有向閉路でないことから，$\mathbf{c}'\mathbf{x}' \geq 0$ である．つまり，$\mathbf{cx}^\circ \geq \mathbf{cx}^*$ が成り立ち，$\mathbf{x}^*$ も最適流である． ■

定理 5.2 は最小費用流問題の最適性条件を与えるものだが，(5.1) を線形計画問題の特殊ケースと捉えれば，その双対問題から別の最適性条件を導くこともできる．

問題 (5.1) に双対変数として，各頂点 $i \in V$ の流量保存条件には y_i を，各枝 $(i,j) \in E$ の容量条件には z_{ij} を導入すれば，(5.1) の双対問題は次のように書くことができる:

$$\left|\begin{array}{lll} \text{最大化} & \displaystyle\sum_{i\in V} b_i y_i - \sum_{(i,j)\in E} u_{ij} z_{ij} & \\ \text{条　件} & y_i - y_j - z_{ij} \le c_{ij}, & \forall (i,j) \in E \\ & z_{ij} \ge 0, & \forall (i,j) \in E. \end{array}\right. \quad \begin{array}{r} (5.4\text{a}) \\ (5.4\text{b}) \\ (5.4\text{c}) \end{array}$$

この問題対 (5.1), (5.4) の相補スラック性条件は，

$$x_{ij}(c_{ij} - y_i + y_j + z_{ij}) = 0 \tag{5.5}$$

$$z_{ij}(x_{ij} - u_{ij}) = 0 \tag{5.6}$$

となるが，これは次の条件に等価である:

定理 5.3.　実行可能流 $\mathbf{x}^*$ が問題 (5.1) の最適流である必要十分条件は，すべての枝 $(i,j) \in E$ に対して以下を満たす (y_i, y_j) が存在することである:

$$x^*_{ij} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_i - y_j \le c_{ij} \tag{5.7a}$$

$$0 < x^*_{ij} < u_{ij} \quad \Longrightarrow \quad y_i - y_j = c_{ij} \tag{5.7b}$$

$$x^*_{ij} = u^*_{ij} \quad \Longrightarrow \quad y_i - y_j \ge c_{ij} \tag{5.7c}$$

条件 (5.7) から，$c_{ij} - y_i + y_j$ の符号が特別な役割を担うと予想できるが，

$$c_{ij}(\mathbf{y}) = c_{ij} - y_i + y_j$$

を枝 $(i,j) \in E$ の**被約費用** (reduced cost) という．この $\mathbf{c}(\mathbf{y}) = (c_{ij}(\mathbf{y}))$ を用いれば，定理 5.3 は次のように言い換えることができる:

系 5.4.　実行可能流 $\mathbf{x}^*$ が (5.1) の最適流であるための必要十分条件は，すべての枝 $(i,j) \in E$ に対して被約費用が以下を満たすことである:

$$c_{ij}(\mathbf{y}) > 0 \quad \Longrightarrow \quad x^*_{ij} = 0 \tag{5.8a}$$

$$c_{ij}(\mathbf{y}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \le x^*_{ij} \le u_{ij} \tag{5.8b}$$

$$c_{ij}(\mathbf{y}) < 0 \quad \Longrightarrow \quad x^*_{ij} = u_{ij} \tag{5.8c}$$

定理 5.3(系 5.4) は線形計画問題の理論的な柱となる重要な定理であるが，問題 (5.1) の場合には残余ネットワーク $N(\mathbf{x})$ を用いて，これをより簡単な形で表現することができる．残余ネットワーク $N(\mathbf{x})$ 上でも各枝 $(i,j) \in E(\mathbf{x})$ に対して

$$c'_{ij}(\mathbf{y}) = c'_{ij} - y_i + y_j$$

を定義しよう．このとき，枝 $(i,j) \in E$ の流れ $x_{ij} > 0$ に対して定義される逆向きの枝 $(j,i) \in E(\mathbf{x})$ では，

$$c'_{ji}(\mathbf{y}) = -c_{ij} - y_j + y_i = -(c_{ij} - y_i + y_j) = -c'_{ij}(\mathbf{y})$$

が成り立つことに注意しよう．

定理 5.5. 実行可能流 $\mathbf{x}^*$ が問題 (5.1) の最適流であるための必要十分条件は，残余ネットワーク $N(\mathbf{x}^*)$ の枝 $(i,j) \in E(\mathbf{x}^*)$ すべてに対して $c'_{ij}(\mathbf{y}) \geq 0$ となることである．

証明: 条件 (5.8) からも導くことができるが，ここでは定理 5.2 を用いて証明してみよう．

まず，任意の枝 $(i,j) \in E(\mathbf{x}^*)$ に対して $c'_{ij}(\mathbf{y}) \geq 0$ であるものと仮定しよう．残余ネットワーク $N(\mathbf{x}^*)$ に含まれる任意の有向閉路を $\theta \subset E(\mathbf{x}^*)$ とすれば，$\sum_{(i,j)\in\theta} c'_{ij}(\mathbf{y}) \geq 0$ である．したがって，

$$0 \leq \sum_{(i,j)\in\theta} c'_{ij}(\mathbf{y}) = \sum_{(i,j)\in\theta} c'_{ij} + \sum_{(i,j)\in\theta} (-y_i + y_j) = \sum_{(i,j)\in\theta} c'_{ij}$$

となり，残余ネットワークには負の閉路が含まれないことがわかる．

逆に，$N(\mathbf{x}^*)$ に負の閉路が存在しないと仮定しよう．すると，各枝 $(i,j) \in E(\mathbf{x}^*)$ の長さを c'_{ij} として出発点 1 から他のすべての頂点 $i \in V \setminus \{1\}$ までの最短距離 $d(i)$ を定義することができる．第 3.3 節の定理 3.7 により，$d(i)$ は最短路最適性条件:

$$d(j) \leq d(i) + c'_{ij}, \quad \forall (i,j) \in E(\mathbf{x}^*)$$

を満足するので，任意の $i \in V$ に対して $y_i = -d(i)$ とおけば，

$$0 \leq c'_{ij} + d(i) - d(j) = c'_{ij} - y_i + y_j = c'_{ij}(\mathbf{y}), \quad (i,j) \in E(\mathbf{x}^*)$$

とすることができる．以上から定理 5.2 との同値性が示された． ■

定理 5.5 を定理 5.2 との同値性を示すことで証明したが，上の 3 つの最適性条件 — 定理 5.2, 5.3(系 5.4), 5.5 はすべて同値である．最小費用流問題 (5.1) に対してはさまざまなアルゴリズムが提案されているが，いずれもこの中の 1 つを最適な流れの探索の拠り所としている．以下では，そうしたアルゴリズムの基本となる**閉路削除法** (cycle-canceling algorithm) と**逐次最短路法** (successive shortest path algorithm) の 2 つを紹介することにしよう．

5.2 閉路削除法

閉路削除法は，問題 (5.1) の主実行可能性を保ちながら，双対実行可能性の実現をめざすアルゴリズムで，**主双対単体法** (primal-dual simplex algorithm) とよばれる単体法の 1 クラスに属する．残余ネットワーク $N(\mathbf{x})$ に負の有向閉路を見つけだしては，これに沿って流れを増加させる

操作を繰り返し，残余ネットワーク上に負の閉路がなくなった時点でアルゴリズムは終了する．アルゴリズムが終了すれば，定理 5.2 により，残余ネットワークを定義している実行可能流が最適流である．

algorithm CYCLE_CANCELING
begin
  ネットワークに実行可能流 $\mathbf{x}$ を求める;
  while $N(\mathbf{x})$ が負の有向閉路を含む **do begin**
    負の有向閉路 θ を 1 つ選ぶ;
    $\delta := \min\{r_{ij} \mid (i,j) \in \theta\}$;
    閉路 θ に沿って流れを δ 単位増量し，$N(\mathbf{x})$ を更新する
  end
end;

実行可能流 $\mathbf{x}$ は，すでに述べたように最大流問題を 1 題解くことで求めることができる．また，$N(\mathbf{x})$ の負の有向閉路は，$\mathbf{c}'_{ij}$ を各枝 $(i,j) \in E(\mathbf{x})$ の長さとし，第 3.3 節に紹介した最短路問題に対するラベル修正法を $N(\mathbf{x})$ に適用すれば，$O(nm)$ 回の演算で見つけだすことができる．

定理 5.6. 閉路削除法の反復回数は高々$O(mCU)$ である．

証明: 各反復で目的関数値は $|\sum_{(i,j)\in\theta} c'_{ij}\delta| \geq 1$ だけ減少する．目的関数値の上界は mCU，また自明な下界はゼロであることから，高々mCU 回の反復で下界値に達することがわかる． ■

したがって，ラベル修正法を手続きに用いれば，閉路削除法の総演算回数は $O(nm^2CU)$ となる．

5.3 逐次最短路法

主実行可能性を保ちながら双対実行可能性をめざす閉路削除法とは逆に，逐次最短路法で維持されるのは双対実行可能性であり，めざすのは主実行可能性である．したがって，計算途中に生成される流れ $\mathbf{x}$ は問題 (5.1) の実行可能流ではなく，各枝の容量条件は満たされるものの，いくつかの頂点で流量保存条件が満足されない．アルゴリズムは，各反復で供給が超過している頂点 s と需要が不足している頂点 t の 2 つを選び，残余ネットワーク上の s から t への最短路に沿って流れを増加する．そして，流れ $\mathbf{x}$ がすべての頂点における流量保存条件を満足した時点で終了する．

疑似流と被約費用. さて，流れ $\mathbf{x}$ が (5.1) の容量条件:

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad \forall (i,j) \in E$$

を満たすとき，これを**疑似流** (pseudoflow) とよぶ．疑似流 $\mathbf{x}$ は流量保存条件:

$$\sum_{\{j|(i,j)\in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i)\in E\}} x_{ji} = b_i, \quad \forall i \in V$$

を必ずしも満足する必要はなく，したがって実行可能流とは限らない．疑似流 $\mathbf{x}$ に対して

$$e(i) = b_i - \sum_{\{j|(i,j)\in E\}} x_{ij} + \sum_{\{j|(j,i)\in E\}} x_{ji}$$

を頂点 i の**超過量** (excess) という．もちろん各頂点 $i \in V$ に対して $e(i) = 0$ が成り立てば，$\mathbf{x}$ は実行可能流でもある．また，疑似流 $\mathbf{x}$ に対しても実行可能流の場合と同様，規則 (a), (b) にしたがって残余ネットワーク $N(\mathbf{x})$ を定義する．

逐次最短路法は，各反復で被約費用 $c'_{ij}(\mathbf{y}) = c'_{ij} - y_i + y_j$ を枝 $(i,j) \in E(\mathbf{x})$ の長さとして最短路を計算し，それに沿って流れを増加させる．ここで，任意の頂点 s から t への有向路 $\pi \subset E(\mathbf{x})$ の長さが

$$\sum_{(i,j)\in\pi} c'_{ij}(\mathbf{y}) = \sum_{(i,j)\in\pi} c'_{ij} - y_s + y_t$$

であることに注意しよう．つまり頂点 s, t 間では，$\mathbf{c}'$ を枝の長さとする場合より，どの有向路を取っても一定の長さ $y_s - y_t$ だけ短い．このことは，$\mathbf{c}'(\mathbf{y})$ に関する最短路が $\mathbf{c}'$ に関する最短路に等しいことを意味している．

いま，ある疑似流 $\mathbf{x}$ に対して

$$c'_{ij}(\mathbf{y}) \geq 0, \quad \forall (i,j) \in E(\mathbf{x}) \tag{5.7}$$

を満たす $\mathbf{y}$ が存在するものとしよう．定理 5.5 より，$\mathbf{x}$ が実行可能流ならば (5.7) は $\mathbf{x}$ の最適性を保証する．残余ネットワーク $N(\mathbf{x})$ における頂点 s から任意の頂点 i への $\mathbf{c}'(\mathbf{y})$ に関する最短距離を $d(i)$ で表し，

$$y'_i = y_i - d(i), \quad \forall i \in V \tag{5.8}$$

とする．

補題 5.7. 疑似流 $\mathbf{x}$ に対して $\mathbf{y}'$ は

$$c'_{ij}(\mathbf{y}') \geq 0, \quad \forall (i,j) \in E(\mathbf{x}) \tag{5.9}$$

を満たし，特に頂点 s から任意の頂点 t への最短路 $\pi \subset E(\mathbf{x})$ 上では

$$c'_{ij}(\mathbf{y}') = 0, \quad \forall (i,j) \in \pi \tag{5.10}$$

を満たす．

証明: 最短路最適性条件:

$$d(j) \le d(i) + c'_{ij}(\mathbf{y}), \quad \forall (i,j) \in E(\mathbf{x})$$

に $c'_{ij}(\mathbf{y}) = c'_{ij} - y_i + y_j$ を代入すれば，

$$d(j) - y_j \le d(i) - y_i + c'_{ij}.$$

さらに (5.8) を用いれば，

$$c'_{ij}(\mathbf{y}') = c'_{ij} - y'_i + y'_j \ge 0, \quad \forall (i,j) \in E(\mathbf{x})$$

となって (5.9) が得られる．また，$(i,j) \in \pi$ ならば $d(j) = d(i) + c'_{ij}(\mathbf{y})$ であるので，同様に (5.10) を示すこともできる． ■

頂点 s から t への最短路 π の容量を

$$\Delta = \min\{r_{ij} \mid (i,j) \in \pi\}$$

で表せば，$N(\mathbf{x})$ 上の流れを π に沿って Δ まで増加できることがわかる．そこで $\delta \le \Delta$ に対して

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \delta, & (i,j) \in \pi \cap E \text{ の場合} \\ x_{ij} - \delta, & (j,i) \in \pi \setminus E \text{ の場合} \\ x_{ij}, & \text{それ以外}, \end{cases}$$

とおけば，容量条件はなおも満たされ，$\mathbf{x}'$ は疑似流となる．

補題 5.8. 疑似流 $\mathbf{x}'$ に対して $\mathbf{y}'$ は

$$c'_{ij}(\mathbf{y}') \ge 0, \quad \forall (i,j) \in E(\mathbf{x}') \tag{5.11}$$

を満たす.

証明: まず，(5.9) より

$$c'_{ij}(\mathbf{y}') \ge 0, \quad \forall (i,j) \in E(\mathbf{x}') \cap E(\mathbf{x})$$

が得られる．また，枝 $(i,j) \in E(\mathbf{x}') \setminus E(\mathbf{x})$ は，枝 $(j,i) \in \pi \subset E(\mathbf{x})$ の流れを増加させたことで生じた枝である．したがって，(5.10) より $c'_{ji}(\mathbf{y}') = 0$ であるので，$c'_{ij}(\mathbf{y}') = 0$ となる． ■

アルゴリズムと計算量. 以上の観察をもとに逐次最短路法では，各反復の双対実行可能性を維持したまま，残余ネットワーク上における 2 頂点間の最短路に沿って流れを増加させ，疑似流を実行可能流に向けて改善していく．

algorithm SUCCESSIVE_SHORTEST_PATH
begin
  $\mathbf{x} := \mathbf{O}$, $\mathbf{y} := \mathbf{O}$ とし，各頂点 $i \in V$ に対して $e(i) := b_i$ とする;
  $S := \{i \in V \mid e(i) > 0\}$; $T := \{i \in V \mid e(i) < 0\}$;
  while $S \neq \emptyset$ **do begin**
    頂点 $s \in S$ と $t \in T$ を選ぶ;
    残余ネットワーク $N(\mathbf{x})$ における頂点 s から他のすべての頂点 i への長さ $\mathbf{c}'(\mathbf{y})$ に関する最短距離 $d(i)$ を求める;
    各頂点 i に対して $y_i := y_i - d(i)$ とする;
    頂点 t への最短路 $\pi \subset N(\mathbf{x})$ に対して $\delta := \{e(s),\ -e(t),\ \min\{r_{ij} \mid (i,j) \in \pi\}\}$ とする;
    π に沿って流れを δ まで増加させ，$\mathbf{x}$ を更新する;
    各頂点 $i \in V$ における超過量 $e(i)$ を更新し，S と T を更新する
  end
end;

このアルゴリズムで以下の 4 つの点に注意しよう:

- 初期流 $\mathbf{x} = \mathbf{O}$ は疑似流である;
- 費用 $\mathbf{c} = (c_{ij})$ が非負であることから，任意の枝 $(i,j) \in E(\mathbf{x})$ に対する被約費用は $\mathbf{y} = \mathbf{O}$ において $c_{ij}(\mathbf{y}) \geq 0$ である;
- 実行可能性の仮定から，$S \neq \emptyset$ ならば $T \neq \emptyset$ である;
- 連結性の仮定から，残余ネットワーク $N(\mathbf{x})$ には頂点 $s \in S$ から $t \in T$ への有向路が必ず存在する．

定理 5.9.　逐次最短路法の反復回数は最大で $O(nU)$ である．

証明:　各反復で，頂点 $s \in S$ から $t \in T$ への流れを増加させることで頂点 s の超過量 $e(s)$ は少なくとも 1 単位減少する．したがって，需給量の上界が U であることから，すべての頂点における流量保存条件を満足させるには高々nU 解の反復が必要となる．

残余ネットワーク $N(\mathbf{x})$ の枝の長さ $\mathbf{c}'(\mathbf{y})$ は非負であるので，頂点 s から t への最短路 $\pi \subset E(\mathbf{x})$ の算出には 3.2 節のダイクストラ法を用いることができる．その場合，逐次最短路法の総演算回数は $O(n^3U)$ となる．また，ダイクストラ法のデータ構造を工夫すれば $O(n(m + n\log n)U)$ の計算時間を実現することができる．