定理 4.5 および 4.6 の証明から，最大流が存在すれば AUGMENTING_PATH によって有限時間のうちに最大流 $\mathbf{x}^*$ と容量最小の s-t カット $[W^*, \overline{W}^*]$ の得られることがわかる．また，すべての枝の容量 u_{ij} が整数の場合，その擬多項式時間収束性も次のようにして示される: 容量 u_{ij} の上限を U とすれば，カット $[\{s\}, V \setminus \{s\}]$ の容量は高々nU である; アルゴリズムの各反復では，増量可能路が見つかれば，それに沿って少なくとも 1 単位は値が増加する: したがって，アルゴリズムの反復回数は最大でも nU 回となる．増量可能路の探索に，例えばダイクストラ法を用いれば，最悪計算量は $O(n^3U)$ である．この上界値は U が大きな値の場合，必ずしも満足のゆくものとはいえない．ところが，ダイクストラ法を用いて枝数の最も少ない増量可能路を見つけることこそ，実は増量可能路法の強多項式時間性を保証する鍵となる．

4.3 最短路増量可能路法

増量可能路法の記述には増量可能路 P を求める手続きが記述されていないが，残余ネットワーク $N(\mathbf{x})$ の枝 $(i,j) \in E(\mathbf{x})$ の費用をすべて $+1$ と定めて，頂点 s を出発点にダイクストラ法を適用することで P を計算することができる．ダイクストラ法が終了したとき，頂点 t のラベルが $d(t) < \infty$ ならば $d(t)$ を与える有向路が P であり，$d(t) = \infty$ ならば $N(\mathbf{x})$ に増量可能路は存在しない．こうして得られる増量可能路 P は，$N(\mathbf{x})$ 上の頂点 s から t への有向路の中で枝数最小の有向路であることから，この修正によって得られるアルゴリズムを**最短路増量可能路法** (shortest augmenting path algorithm) とよぶ．

function SHORTEST_PATH($N(\mathbf{x})$: 残余ネットワーク)
begin
  $\mathcal{P} := \{s\}$; $\mathcal{T} := V \setminus \{s\}$;
  $d(s) := 0$; $\mathrm{pred}(s) := 0$;
  if $(s,j) \in E(\mathbf{x})$ **then** $d(j) := 1$ と $\mathrm{pred}(j) := s$ を初期化する
  else $d(j) := \infty$;
  while $\mathcal{P} \neq V$ **do begin**
    $d(i) := \min\{d(j) \mid j \in \mathcal{T}\}$ を満たす頂点 i を選ぶ;
    $\mathcal{P} := \mathcal{P} \cup \{i\}$; $\mathcal{T} := \mathcal{T} \setminus \{i\}$;
    for 各 $(i,j) \in E(\mathbf{x})$ **do**
      if $d(j) > d(i) + 1$ **then** $d(j) := d(i) + 1$ と $\mathrm{pred}(j) := i$ を更新する
  end;
  if $d(t) < \infty$ **then return** (P : $\mathrm{pred}(t)$ を辿って得られる s から t への有向路)
  else return ($\emptyset$)
end;

この関数の目的は頂点 t への最短路を求めることだけなので，t に永久ラベルが貼られたら直ちに **while** のループを抜け出してよい．さて，アルゴリズム AUGMENTING_PATH の **while** 行を

while $(P :=$ SHORTEST_PATH$(N(\mathbf{x}))) \neq \emptyset$ **do begin**

と書き換えれば，最短路増量可能路法のできあがりである．

アルゴリズムの計算量. 増量可能路 P として残余ネットワーク $N(\mathbf{x})$ 上の最短路を用いることには大きなメリットがある．以下に，これを説明しよう．

関数 SHORTEST_PATH の呼び出しごとに入力となる残余ネットワークは異なるため，各頂点 $i \in V$ に貼られる距離ラベル $d(i)$ も変化する．そこで，k 回めの呼び出しの際に入力される残余ネットワークを N^k，また頂点 $i \in V$ に貼られる永久ラベルを $d^k(i)$ で表すことにしよう．また，N^k の枝集合を E^k で表せば，任意の $k = 1, 2, \ldots$ に対して残余ネットワーク N^k に関する次の最短路最適性条件が成り立つ:

$$d^k(s) = 0; \quad d^k(j) \leq d^k(i) + 1, \quad \forall (i, j) \in E^k. \tag{4.8}$$

補題 4.7. 任意の $i \in V$ に対し，距離ラベル $d^k(i)$ の値は k に関して単調非減少である．

証明: 増量可能路法の第 k 反復では，$P \subset E^k$ に沿って $\delta > 0$ の流れが追加され，残余ネットワーク N^k は N^{k+1} に更新される．この操作を次の 2 段階で行うものとしよう:

(a) 各 $(i, j) \in P$ に対し，$(j, i) \neq E^k$ ならば枝 (j, i) を N^k に加え，これを N' とする;

(b) 各 $(i, j) \in P$ に対し，$r_{ij} = \delta$ ならば枝 (i, j) を N' から取り去り，N^{k+1} とする．

増量可能路 P は N^k 上の頂点 s から t への最短路であるので

$$d^k(j) = d^k(i) + 1, \quad \forall (i, j) \in P$$

が成り立つ．したがって，操作 (a) で N^k に加えられた枝集合を A とすれば

$$d^k(s) = 0; \quad d^k(j) \leq d^k(i) + 1, \quad \forall (i, j) \in E^k \cup A$$

が満たされ，$d^k(i)$ は N' 上でも頂点 s から j への最短距離を与えることがわかる．一方，操作 (b) から明らかなように，$d^{k+1}(i)$ は N' の部分グラフ上での最短距離を与えるにすぎない．このことから直ちに

$$d^{k+1}(i) \geq d^k(i), \quad \forall i \in V$$

が導かれる． ■

この補題によって示された距離ラベル $d^k(i)$ の単調性を用い，最短路増量可能路法の強多項式時間性が導かれる．

定理 4.8. 増量可能路として残余ネットワークの頂点 s から t への最短路を用いれば，増量可能路法は高々$(n+1)m/2$ 回の反復で終了する．

証明: 増量可能路法の第 k 反復では，補題 4.7 の証明で用いた操作 (b) により，少なくとも 1 本の枝 $(i,j) \in P$ が残余ネットワーク N^k から取り除かれる．このときにネットワークに追加される流れは枝 (i,j) の残余容量 r_{ij} を一杯にするので，(i,j) を「飽和した枝」とよぶことにしよう．さて，飽和した枝 (i,j) には次のような性質がある:

- 第 k 反復以降で枝 (i,j) が再び飽和したとすれば，それまでのある反復において必ず枝 (j,i) に流れが生じている;
- 第 ℓ $(> k)$ 反復で枝 (j,i) にはじめて流れが生じたとすれば，(j,i) は N^ℓ の頂点 s から t への最短路に含まれ，距離ラベルの単調性により以下が成り立つ:

$$d^\ell(i) = d^\ell(j) + 1 \geq d^k(j) + 1 = d^k(i) + 2.$$

どの反復においても，残余ネットワーク上の頂点 s から i への最短路には $n-1$ 本以下の枝しか含まれない．したがって，枝 (i,j) が飽和する回数は多くとも $(n-1)/2+1 = (n+1)/2$ である．この議論を E のすべての枝に適用すれば，増量可能路法の反復回数は，結局 $(n+1)m/2$ 以下となることがわかる． ■

この定理から，関数 SHORTEST_PATH を組み込んだ最短路増量可能路法の最悪計算量は $O(n^3m)$ となり，問題規模の強多項式で押さえられることがわかる．したがって，4.2 節の最後に行った増量可能路法の最悪計算量の評価 $O(n^3U)$ はかなりの過大評価であったといえる．しかし，増量可能路の選択方法を特定しなくとも擬多項式時間での収束が保証される柔軟さは，このアルゴリズムの大きな長所でもある．なお，さらに改良を重ねることで増量可能路法は $O(nm \log n)$ の実行時間を実現することができるが，これ以上の改良はネットワークが非常に密な場合 $(m \approx n(n-1)/2)$ でなければ難しいようである．

参考文献

最大流問題は，最悪計算量の改善が長年にわたって続けられたことでも有名であるが，その様子をまとめたのが下の表である．もちろん，この他にもおびただしい数のアルゴリズムが発表されている．第 4.2, 4.3 節で紹介した増量可能路法の原型は Ford and Fulkerson [4]，最短路を増量可能路とすることで強多項式時間制を示したのは Edmonds and Karp [3] である．この表では，Edomonds and Karp の計算量