flow) であり，これを求める最大流問題は次のように定式化される:

$$
\left|\begin{array}{ll}
\text{最小化} & v \\
\text{条　件} & \displaystyle\sum_{\{j|(i,j)\in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i)\in E\}} x_{ji} = \begin{cases} v, & i = s \\ 0, & \forall i \in V \setminus \{s,t\} \\ -v, & i = t \end{cases} \\
& 0 \le x_{ij} \le u_{ij}, \quad \forall (i,j) \in E.
\end{array}\right. \tag{4.1}
$$

最短路問題 (3.1) がネットワーク流の枝の費用のみを考慮したモデル化であるのに対し，最大流問題 (4.1) は枝の費用を無視して容量だけを考慮しており，両者は互いを補完する関係にある．また，問題自体がそうであるように (4.1) を解くアルゴリズムは最小費用流問題 (1.2) のアルゴリズムの特殊化で，これを逆に一般化することで (1.2) の解決が可能となる．

問題 (4.1) のアルゴリズムは大きく 2 つに分類することができる:

増量可能路法 (augmenting-path algorithm).　入口 s と出口 t 以外の各頂点における流量保存条件を常に保ち，s から t への増量可能な有向路に沿って流量を徐々に増加させる．

予備流押し出し法 (preflow-push algorithm).　ネットワークへ一度に枝の容量の総和を流し込み，各頂点の流量保存条件を超過した流れは出口 t か，あるいは入口 s へ押し出す．

ここでは，前節に紹介した最短路問題のアルゴリズムをサブルーチンとして利用できる増量可能路法について説明することにする．その前に，これら 2 つのアルゴリズムが拠り所とする (4.1) の基本構造を調べておこう．

4.1　流れとカット

まず，増量可能路法で中心的な役割を演じる 2 つの概念を定義しよう:

残余ネットワーク.　問題 (4.1) の流れ $\mathbf{x} = (x_{ij})$ に対し，次の規則にしたがって枝集合 $E(\mathbf{x})$ とその容量 $\mathbf{r} = (r_{ij} \mid (i,j) \in E(\mathbf{x}))$ を定義する:

(a)　$u_{ij} - x_{ij} > 0$ ならば $(i,j) \in E(\mathbf{x})$ とし，その容量を $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$ とする．

(b)　$x_{ij} > 0$ ならば $(j,i) \in E(\mathbf{x})$ とし，その容量を $r_{ji} = x_{ij}$ とする．

この結果えらえる有向グラフ $G(\mathbf{x}) = (V, E(\mathbf{x}))$ と容量 $\mathbf{r} = (r_{ij})$ をあわせて**残余ネットワーク** (residual network) とよび，これを $N(\mathbf{x})$ で表す．

図 4.1 の左のネットワークに流れ $\mathbf{x}$ が与えられれば，その残余ネットワーク $N(\mathbf{x})$ は右の図のようになる．残余ネットワークは，つまり現在の流れ $\mathbf{x}$ から増減が可能な方向と量を示すものである．

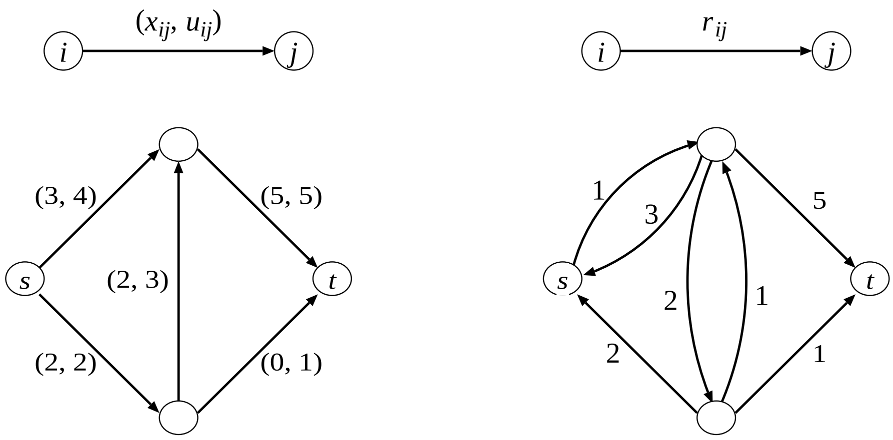

図 4.1: 流れ $\mathbf{x}$ のあるネットワークと残余ネットワーク $N(\mathbf{x})$.

s-t カット.　頂点集合 $W \subset V$ (ただし，$W \neq \emptyset$, $W \neq V$) に対し，W とその補集合 $\overline{W} = V \setminus W$ を接続する枝集合を**カット** (cut) とよび，$[W, \overline{W}]$ で表す．特に $s \in W$, $t \in \overline{W}$ のとき，$[W, \overline{W}]$ を s-t **カット** (s-t cut) とよぶが，これは**前進枝** (forward arc) の集合

$$(W, \overline{W}) = \{(i, j) \in E \mid i \in W,\ j \in \overline{W}\}$$

と**後退枝** (backward arc) の集合

$$(\overline{W}, W) = \{(i, j) \in E \mid i \in \overline{W},\ j \in W\}$$

の和集合として表される:

$$[W, \overline{W}] = (W, \overline{W}) \cup (\overline{W}, W).$$

前進枝の容量の総和

$$u[W, \overline{W}] = \sum_{(i,j) \in (W, \overline{W})} u_{ij}$$

を s-t カット $[W, \overline{W}]$ の**容量** (capacity) という．また，残余ネットワークにおける s-t カット $[W, \overline{W}]$ の容量

$$r[W, \overline{W}] = \sum_{(i,j) \in (W, \overline{W})} r_{ij}$$

をその**残余容量** (residual capacity) という．

さて，$\mathbf{x} = (x_{ij})$ を問題 (4.1) の任意の実行可能流とし，このときの入口 s から出口 t への総流量を v としよう．この総流量 v を流れ $\mathbf{x}$ の**値** (value) とよぶ．任意の s-t カット $[W, \overline{W}]$ を横切る流れ $\mathbf{x}$ は正味

$$x[W, \overline{W}] = \sum_{(i,j) \in (W, \overline{W})} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in (\overline{W}, W)} x_{ij}$$

である．一方，頂点 $i \in W$ に関する流量保存条件をすべて足しあわせると

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i\in W}\left(\sum_{\{j|(i,j)\in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i)\in E\}} x_{ji}\right) \\ &= \sum_{i\in W}\left(\sum_{\{j\in W|(i,j)\in E\}} x_{ij} + \sum_{\{j\in \overline{W}|(i,j)\in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j\in W|(j,i)\in E\}} x_{ji} - \sum_{\{j\in \overline{W}|(j,i)\in E\}} x_{ji}\right) \\ &= \sum_{i\in W}\sum_{\{j\in \overline{W}|(i,j)\in E\}} x_{ij} - \sum_{i\in W}\sum_{\{j\in \overline{W}|(i,j)\in E\}} x_{ji} \end{aligned}$$

となり，

$$v = x[W,\overline{W}] = \sum_{(i,j)\in(W,\overline{W})} x_{ij} - \sum_{(i,j)\in(\overline{W},W)} x_{ij} \tag{4.2}$$

が成り立つことがわかる．ここで，容量条件 $0 \le x_{ij} \le u_{ij}$, $(i,j) \in [W,\overline{W}]$ を使えば，

$$v = x[W,\overline{W}] \le \sum_{(i,j)\in(W,\overline{W})} u_{ij} = u[W,\overline{W}] \tag{4.3}$$

となる．

性質 4.1. 任意の実行可能流 $\mathbf{x}$ の値 v と任意の s-t カット $[W,\overline{W}]$ の容量との間には次の関係が成り立つ:

$$v \le u[W,\overline{W}].$$

この性質から直ちに最適性の十分条件が得られる．

性質 4.2.
$$v = u[W,\overline{W}] \tag{4.4}$$
を満たす s-t カット $[W,\overline{W}]$ が存在すれば，$\mathbf{x}$ は最大流である．

この 2 つの性質 4.1, 4.2 を，残余ネットワークを使って言い換えてみよう．ある $\Delta v \ge 0$ に対し，値 $v+\Delta v$ の実行可能流 $\mathbf{x}'$ が存在するものとしよう．上の議論における実行可能流 $\mathbf{x}$ の任意性により，(4.3) から

$$v + \Delta v = x'[W,\overline{W}] \le \sum_{(i,j)\in(W,\overline{W})} u_{ij}.$$

これより (4.2) を辺々引いて

$$\Delta v \le \sum_{(i,j)\in(W,\overline{W})} (u_{ij} - x_{ij}) + \sum_{(i,j)\in(\overline{W},W)} x_{ij}$$

が得られる．したがって，流れ $\mathbf{x}$ に対する残余ネットワーク $N(\mathbf{x})$ の定義 (a), (b) から，

$$\Delta v \le \sum_{(i,j)\in(W,\overline{W})} r_{ij} = r[W,\overline{W}]$$

が導かれる．

性質 4.3. 任意の実行可能流 $\mathbf{x}$ に対する任意の s-t カットの残余容量と入口 s から出口 t へ向かって増量可能な値 Δv との間には次の関係が成り立つ:

$$\Delta v \le r[W, \overline{W}].$$

性質 4.4. 実行可能流 $\mathbf{x}$ に対し,

$$r[W, \overline{W}] = 0 \tag{4.5}$$

を満たす s-t カット $[W, \overline{W}]$ が存在すれば,$\mathbf{x}$ は最大流である.

4.2 増量可能路法と最大流最小カット定理

与えられた実行可能流 $\mathbf{x}$ に対する残余ネットワーク $N(\mathbf{x})$ に入口 s から出口 t への有向路 $P \subset E(\mathbf{x})$ が存在すれば,それに沿って総流量を増加させることができる.実際,

$$\delta = \min\{r_{ij} \mid (i,j) \in P\} > 0 \tag{4.6}$$

を用い,もとのネットワークの各枝 $(i,j) \in E$ に対して

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \delta, & (i,j) \in P \text{ [定義 (a) による枝 } (i,j) \in E(\mathbf{x})] \text{ の場合} \\ x_{ij} - \delta, & (j,i) \in P \text{ [定義 (b) による枝 } (j,i) \in E(\mathbf{x})] \text{ の場合} \\ x_{ij}, & \text{それ以外の場合}, \end{cases} \tag{4.7}$$

の修正を加えれば,$\mathbf{x}'$ は再び (4.1) の実行可能流となり,ネットワークの総流量が δ だけ増加する.残余ネットワーク $N(\mathbf{x})$ 上の,このような有向路 P を**増量可能路** (augmenting paht) とよぶ.増量可能路法は,残余ネットワークに増量可能路が存在しなくなるまで実行可能流と残余ネットワークの更新を繰り返し,値 v をその最大値にまだ増加させる方法である.

algorithm AUGMENTING_PATH
begin
  $\mathbf{x} := \mathbf{O}$;
  while $N(\mathbf{x})$ に増量可能路 P が存在 **do begin**
    $\delta := \min\{r_{ij} \mid (i,j) \in P\}$;
    P に沿って流れを δ 増加させ,$\mathbf{x}$ と $N(\mathbf{x})$ を更新する
  end
end;

入口 s からの有向路が $N(\mathbf{x})$ 上に存在する頂点の集合を W で表せば,出口 t が

$$t \in \overline{W} = V \setminus W$$

となった時点でアルゴリズムは終了する．このとき，$[W, \overline{W}]$ はもとのグラフ G の s-t カットを構成するが，その残余容量 $r[W, \overline{W}]$ はゼロで，性質 4.4 から $\mathbf{x}$ の最適性が保証される．ところが，性質 4.2（および 4.4）は最適性の十分性を与えているにすぎず,「最大流 $\mathbf{x}$ のある場合は必ず (4.4) （および (4.5)）を満たす s-t カット $[W, \overline{W}]$ が存在する」ことを保証しなければ，アルゴリズム AUGMENTING_PATH の正当性も認められない．

定理 4.5 [**最大流最小カット定理**]. 入口頂点 s から出口頂点 t への流れの最大値は，すべての s-t カットの容量の最小値に等しい．

証明: 最大流を $\mathbf{x}^* = (x^*_{ij})$，その値を v^* としよう（性質 4.1 より，容量が有限のカットが存在すれば，最大流は保証される）．このときの残余ネットワーク $N(\mathbf{x}^*)$ には頂点 s から t への有向路は存在しない．なぜなら，そのような有向路 $P \subset E(\mathbf{x}^*)$ が存在したとすれば，(4.6), (4.7) にしたがって v^* を $v^* + \delta$ に改善でき，$\mathbf{x}^*$ が最大流であることに矛盾する．そこで，$N(\mathbf{x}^*)$ において頂点 s からの有向路が存在する頂点の集合を W^* で表すことにすれば，

$$s \in W^*, \quad t \in \overline{W}^* = V \setminus W^*$$

であり，$[W^*, \overline{W}^*]$ は s-t カットとなる．さらに，残余ネットワークの定義 (a), (b) より

$$x^*_{ij} = \begin{cases} u_{ij}, & (i,j) \in (W^*, \overline{W}^*) \text{ の場合} \\ 0, & (i,j) \in (\overline{W}^*, W^*) \text{ の場合}, \end{cases}$$

であることもわかる．これより，

$$\begin{aligned} v^* = x[W^*, \overline{W}^*] &= \sum_{(i,j) \in (W^*, \overline{W}^*)} x^*_{ij} - \sum_{(i,j) \in (\overline{W}^*, W^*)} x^*_{ij} \\ &= \sum_{(i,j) \in (W^*, \overline{W}^*)} u_{ij} \\ &= u[W^*, \overline{W}^*] \end{aligned}$$

が成り立ち，性質 4.1 とともに定理は示された． ■

さらに，アルゴリズム AUGMENTING_PATH を使えば，次の重要な結果を示すことができる:

定理 4.6. 枝 $(i,j) \in E$ の容量 u_{ij} がすべて整数ならば，整数の最大流が存在する．

証明: まず，AUGMENTING_PATH の任意の反復における実行可能流 $\mathbf{x}$ が整数ベクトルであることを帰納的に示そう．流れ $\mathbf{x}$ が整数ベクトルであることを仮定すれば，残余ネットワークの定義 (a), (b) より，$N(\mathbf{x})$ の各枝 $(i,j) \in E(\mathbf{x})$ の容量 r_{ij} もすべて整数となる．したがって，(4.6) から定まる δ も整数，(4.7) によって定まる次の反復の実行可能流 $\mathbf{x}'$ も整数ベクトルとなる．

さて，δ は整数なので，流れの値 v は 1 回の反復で少なくとも 1 単位増加する．ところが，どの s-t カット $[W, \overline{W}]$ の容量 $u[W, \overline{W}]$ も整数で有限の値をとることから，性質 4.1 により AUGMENTING_PATH は有限回の反復ののちに終了することがわかる．このときの流れ，つまり最大流も整数ベクトルである． ■