様相論理 (modal logic)

- 文が正しいかどうかはどのようにして決まるか
  - 例
    - 「鳩山一郎は日本の総理大臣である．」
      - これは**現在**は偽であるが，56年前(1954-1956)は真.
    - 「太陽系には9つの惑星がある．」
      - ついこの間まで真であったはずだが…
    - 「3の3乗は27である．」
      - これはずっと真であるはず…
      - しかしながら，例えば小学生は真であることを**知らない.**
- 文が正しいかどうかを決める**様相(mode)**を考える.
  - 「必然的に正しい」「正しい可能性がある」
    「正しいこと知っている」「いずれ正しくなる」etc.

- 様相論理で扱う例題
    - 3人の賢者

      王様が3人の賢者のうち誰が一番賢いかを知る目的で,

      3人の額に白か赤かの印を付けた.

      自分の額の印の色はわからない.

      王様は

      「少なくとも一人の印の色は赤だ．自分の額の色を当てろ」

      と告げ，ひとりづつ順に聞いていった.

      最初の人は「わからない」と答え,

      それを聞いた次の人も「わからない」と答えたが

      それを聞いた3人目の賢者は「わかった」と答えた.

      なぜか．また，何色であったか.

      (実際にはmulti-agent modal logicに拡張しないと解析できない)

	A	B	C	
FALSE	W	W	W	少なくとも一人は赤であることに反する
	W	W	R	
FALSE	W	R	W	ACが白であるのでBは赤であることに気づくはず
	W	R	R	
FALSE	R	W	W	BCが白であるのでAは赤であることに気づくはず
	R	W	R	
FALSE	R	R	W	※
	R	R	R	

※　Cの推論

「Bが，Aが赤(R)，Cが白(W)をみたと仮定する．このときBにとっての選択肢はRRWかRWWである．

Aが「わからない」と答えたので，BもRWWではないことがわかる．

(RWWならばAがRであることがわかるはず．)

したがって，BはRRWであることに気づくはずである．

しかしながらBは「わからない」と答えたので，RRWでもない．

よって，最初の仮定が間違っていて，RRWではありえない．

命題様相論理 (propositional modal logic)

- 文法
  - $p, q, r, p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots \in \mathrm{Atom}$: 原始命題 (atomic formulas)
  - 様相論理の論理式φは，以下のBNFによって定義される
    - $\varphi ::= \bot \mid \top \mid p \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi\wedge\varphi) \mid (\varphi\vee\varphi) \mid (\varphi\supset\varphi) \mid (\varphi\equiv\varphi) \mid (\Box\varphi) \mid (\Diamond\varphi)$
      - 但しpは原始命題
    - □, ◇: 様相演算記号(modal operator)
    - □, ◇の結合力が最も強いとして，かっこは適宜省略する.

- 読み方　　□: box, ◇: diamond
- 直感的な意味
  - □φ: φが必然的に真である.
    ◇φ: φが真である可能性がある.
  - 「知識の論理」においては
    □φ: Agent Qはφが真であることを知っている.
    ◇φ: φが真であることは知識と矛盾しない.

  - □□φ:　「φが必然的に真であること」が必然的に真である.
    「Qがφが真であることを知っている」ことをQが知っている.

- 同値な命題
  - $\neg\Box\varphi \equiv \Diamond\neg\varphi$,
    - φが必然的に真ではない. ⇔ φが真でない可能性がある.
    - φが真であることを知らない ⇔ φが真でないことは知識と矛盾しない.
  - $\Box\neg\varphi \equiv \neg\Diamond\varphi$
    - φでないことは必然的に真である. ⇔ φが真である可能性がない.
    - φでないことを知っている. ⇔ φが真であることは知識と矛盾する.

- 様相のいろいろな捉え方

□φ	◇φ
φが必然的に真	φが真である可能性がある
φは未来では常に真	φはいずれ未来で真になる
φであるべきである	φであることを許す
agent Qがφであることを信じる	agent Qの信念とφが矛盾しない
agent Qがφであることを知っている	agent Qの知識とφが矛盾しない
プログラムPがどのように実行されても，その実行後にφが成立つ	プログラムPのある実行後にはφが成立つ

- 様相のいろいろな捉え方

□φ	□φ⊃φ	□φ⊃□□φ	◇φ⊃□◇φ	◇T	□φ⊃◇φ	□(φ⊃ψ)∧□φ⊃□ψ	◇φ∧◇ψ⊃◇(φ∧ψ)
φが必然的に真	○	○	○	○	○	○	
φは未来では常に真		○				○	
φであるべきである				○	○	○	
agent Qがφであることを信じる		○	○	○	○	○	
agent Qがφであることを知っている	○	○	○	○	○	○	
プログラムPがどのように実行されても，その実行後にφが成立つ						○	

- 以下の式は成り立つだろうか.
  - $\Box(\varphi \supset \psi) \supset (\Box\varphi \supset \Box\psi)$
    φならばψが必然的に成立ち，φが必然的に成立つならばψも必然的に成立つ

    φならばψを知っていて，φを知っているならばψも知っている
  - $(\Box\varphi \supset \Box\psi) \supset \Box(\varphi \supset \psi)$
    φが必然的に成立つならばψも必然的に成立つならば,

    φならばψも必然的に成立つ

    φを知っているならばψも知っているならば，φならばψも知っている
    - 命題論理的に同値な式で書き換えると

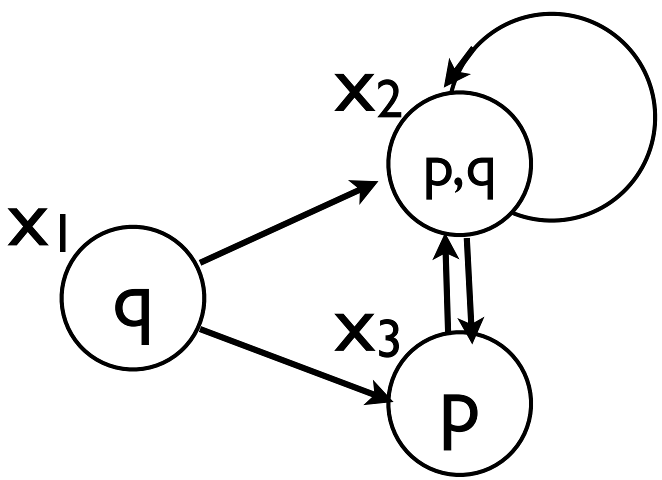
      $(\neg\Box\varphi \supset \Box(\varphi \supset \psi)) \wedge (\Box\psi \supset \Box(\varphi \supset \psi))$
      となる．これは適切か?
  - $\Box\varphi \supset \varphi$
  - $\varphi \supset \Box\varphi$
  - $\Box\varphi \supset \Box\Box\varphi$
  - $\Diamond\varphi \supset \Box\Diamond\varphi$

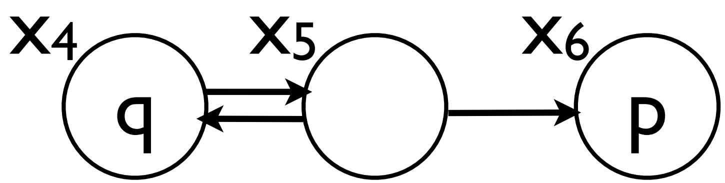
意味論(semantics)

- クリプキ構造(Kripke Structure)
  - モデル: M=(W, R, L)
    - W: 可能世界(worlds)の集合
    - R:W×W : 接近可能性関係(accesibility relation)
      - 可能世界同士の間で接近できるかどうかの関係
    - L:W→P(Atom): ラベル付け関数(labelling function)
      - 原始命題が個々の可能世界で真であるかどうかを決める関数

- 例
  - $W=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$
  - $R(x_1, x_2), R(x_1, x_3), R(x_2, x_2), R(x_2, x_3), R(x_3, x_2), R(x_4\ x_5), R(x_5, x_4), R(x_5\ x_6)$
  - $L(x_1)=\{q\}, L(x_2)=\{p, q\}, L(x_3)=\{p\}, L(x_4)=\{q\}, L(x_5)=\Phi, L(x_6)=\{p\}$

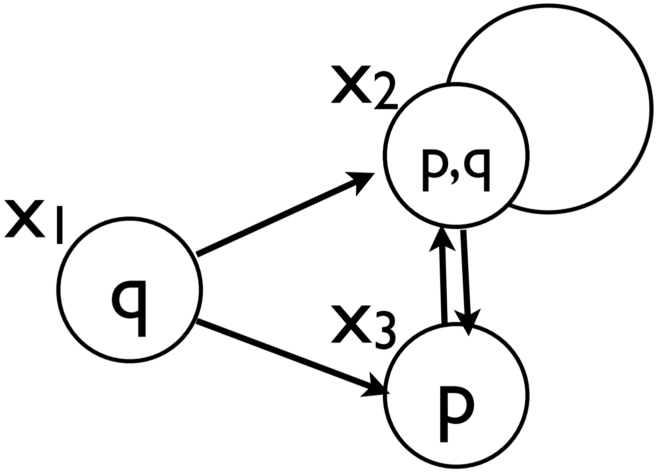
  - 図示すると以下のようになる

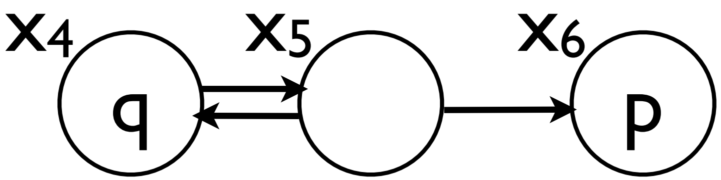




- 充足関係(satisfaction relation) $x \models \varphi$
  - 可能世界$x \in W$でφが充足される(成立つ，真である)
    - 以下のようにφの構造に関して帰納的に定義する
      - $x \models T$
      - $x \not\models \perp$
      - $x \models p \Leftrightarrow p \in L(x)$
      - $x \models \neg\varphi \Leftrightarrow x \not\models \varphi$
      - $x \models \varphi \vee \psi \Leftrightarrow x \models \varphi$または $x \models \psi$
      - $x \models \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow x \models \varphi$かつ $x \models \psi$
      - $x \models \varphi \supset \psi \Leftrightarrow x \models \varphi$ならば $x \models \psi$
      - $x \models \Box\varphi \Leftrightarrow R(x, y)$なる全てのyに対して$y \models \varphi$
      - $x \models \Diamond\varphi \Leftrightarrow R(x, y)$なるあるyに対して$y \models \varphi$

- 例　下記のモデルで
  - $x_1 \models q$
  - $x_1 \models \Diamond q$
  - $x_1 \not\models \Box q$
  - $x_5 \not\models \Box p$, $x_5 \not\models \Box q$
- $x_5 \not\models \Box p \lor \Box q$, $x_5 \models \Box(p \lor q)$
- $x_6 \models \Box p$, $x_6 \not\models \Diamond p$
- $x_6 \not\models \Diamond \top$

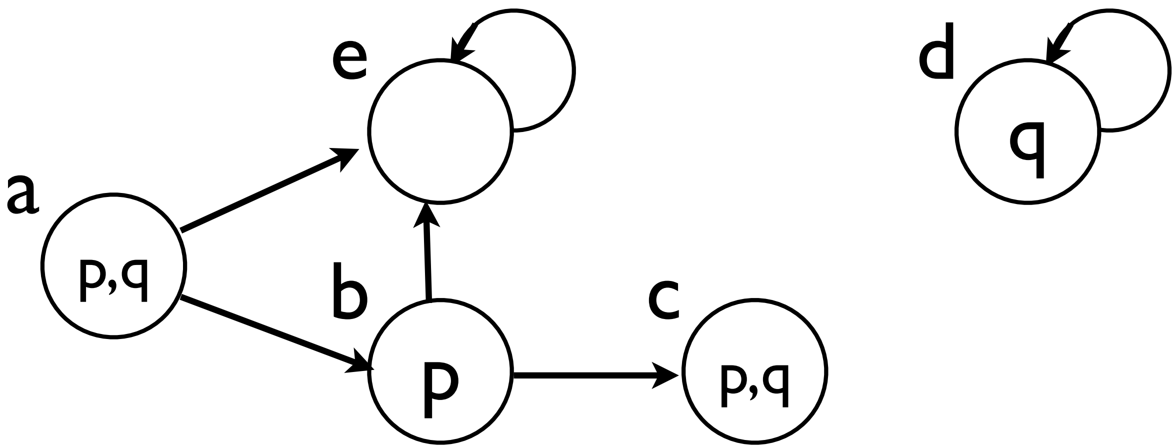




- 演習問題

  下記のモデルで以下は成立つか.

  1. $a \models p$
  2. $a \models \Box \neg q$
  3. $a \models \Box \Box q$
  4. $b \models \Diamond p$
  5. $c \models \Box \bot$
  6. $d \models \Box \Box q$
  7.



- $M \models \varphi$　　φはMで満足される(satisfy)

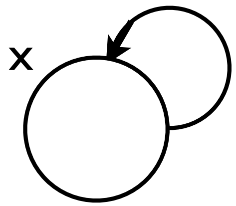
  $M = (W, R, L)$に対しどのような$x \in W$に対しても$x \models \varphi$

- $\models \varphi$　　φは妥当(valid)である.

  どのようなMについても $M \models \varphi$である.

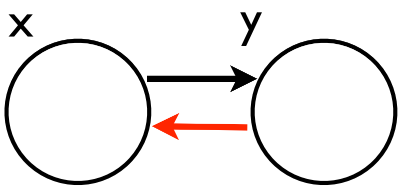
- 二項関係Rの諸特性
  - 反射的(reflexive): R(x, x)
  - 対称的(symmetric): R(x, y)ならばR(y, x)
  - 推移的(transitive): R(x, y), R(y, z)ならばR(x, z)
  - 直列的(serial): どんなx∈Wに対してもR(x, y)なるyが存在する
  - ユークリッド的(Euclidean): R(x, y), R(x, z)ならばR(y, z)
  - 関数的(functional): どんなx∈Wに対してもR(x, y)なるyが一つだけ存在する
  - 線形的(linear): R(x, y), R(x, z)ならばR(y, z)またはy=zまたはR(z, y)
  - 全的(total): R(x, y)またはR(y, x)

  - 同値関係: 反射的, 対称的, 推移的
    - 反射的，推移的，ユークリッド的でも同値関係である.



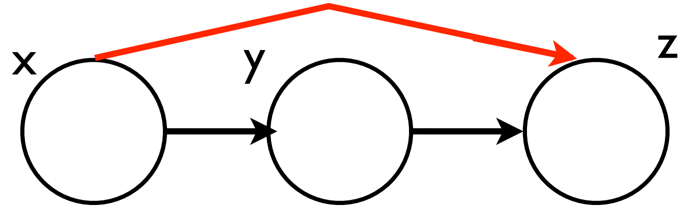
reflexive

$R(x, x)$



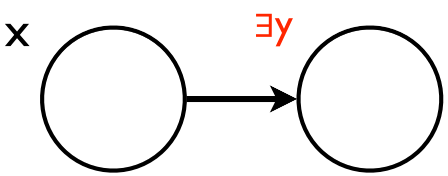
symmetric

$R(x, y) \supset R(y, x)$



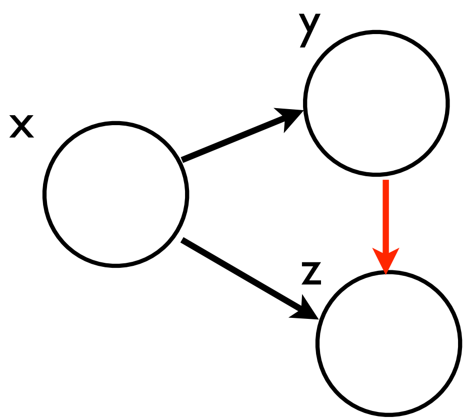
transitive

$R(x, y) \wedge R(y, z) \supset R(x, z)$



serial

$\exists y R(x, y)$



Euclidean

$R(x, y) \wedge R(x, z) \supset R(y, z)$

問

反射的, 対称的, 推移的⇔反射的，推移的，ユークリッド的

であることを示せ.

- 反射的(reflexive): R(x, x)
- 対称的(symmetric): R(x, y)ならばR(y, x)
- 推移的(transitive): R(x, y), R(y, z)ならばR(x, z)
- ユークリッド的(Euclidean): R(x, y), R(x, z)ならばR(y, z)

解

(→)
R(x, y)，R(x, z)と仮定し，R(y, z)を導く.

対称的なので，R(x, y)よりR(y, x). したがって，推移的なので，R(y, x)とR(x, z)からR(y, z).

(←)
R(x, y)と仮定し，R(y, x)を導く.

反射的なのでR(x, x). したがって，ユークリッド的なので，R(x, y)とR(x, x)よりR(y, x).

問

Rが反射的であることと

どのようなラベル関数Lに対しても，どのようなxでも$x \models \Box p \supset p$が成り立つことが

同値であることを示せ.

解

(→)

$x \models \Box p$であるとする．定義より$R(x, y)$なる全てのyで$y \models p$であるが，$R(x, x)$なので，

$x \models p$.

すなわち$x \models \Box p \supset p$.

(←)

$x \models \Box p \supset p$とし，

x以外のyに対しては$p \in L(y)$であるが$p \notin L(x)$であるようなlabeling function Lを考える.

$R(x, x)$でないと仮定する(帰謬法 の仮定).

すると，上記のLの仮定より，

xから到達できるどのworld yでも$y \models p$であるので，$x \models \Box p$である.

一方，$x \not\models p$である.

これは$x \models \Box p \supset p$と矛盾する.

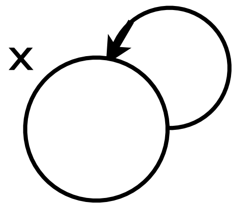
- Rの特性と関係する式

名前	式	特性
T	$\Box\varphi\supset\varphi$	reflexive
B	$\varphi\supset\Box\Diamond\varphi$	symmetric
D	$\Box\varphi\supset\Diamond\varphi$	serial
4	$\Box\varphi\supset\Box\Box\varphi$	transitive
5	$\Diamond\varphi\supset\Box\Diamond\varphi$	Euclidean
	$\Box\varphi\supset\Diamond\varphi$	functional
	$\Box(\varphi\wedge\Box\varphi\supset\psi)\vee\Box(\psi\wedge\Box\psi\supset\varphi)$	linear

φがTのもとで妥当なとき，$|\!=_{KT}\ \varphi$　と表す.

同様に，$|\!=_{KT4}\ \varphi$, $|\!=_{KT45}\ \varphi$等がある.

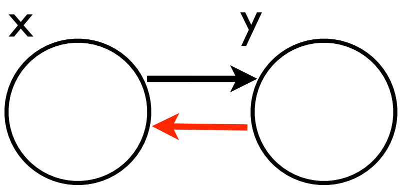
ただし，Kとは $\Box(\varphi\supset\psi)\supset(\Box\varphi\supset\Box\psi)$のこと.



reflexive

$R(x, x)$

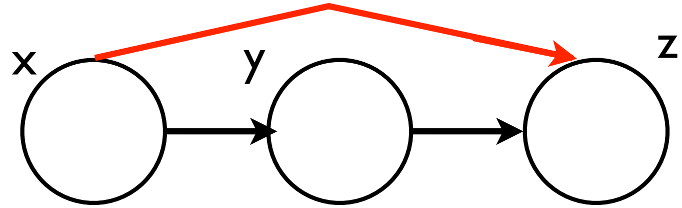
$\Box\varphi \supset \varphi$



symmetric

$R(x, y) \supset R(y, x)$

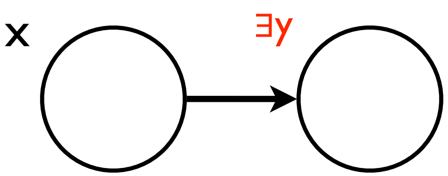
$\varphi \supset \Box\Diamond\varphi$



transitive

$R(x, y) \wedge R(y, z) \supset R(x, z)$

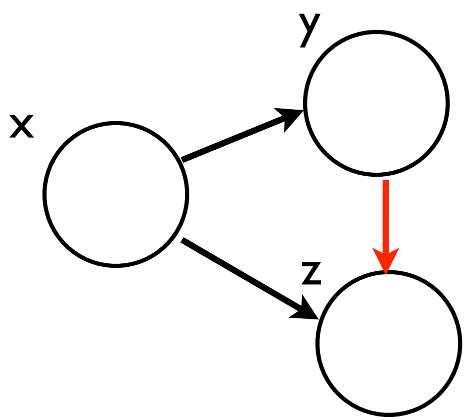
$\Box\varphi \supset \Box\Box\varphi$



serial

$\exists y R(x, y)$

$\Box\varphi \supset \Diamond\varphi$



Euclidean

$R(x, y) \wedge R(x, z) \supset R(y, z)$

$\Diamond\varphi \supset \Box\Diamond\varphi$

- 例
  - □φを「agent Qがφを知っている」を意味するとする.
    R(x, y)は,
    yがxにおけるQの知識に関する現実世界(actual world)を意味する.
  - Rは反射的か?
    - Qがφを知っているならばそれは事実であるはずである.
      ⇒反射的であるだろう.
  - Rは推移的か?
    - yがxからみたQの知識の世界であり，zがyから見たそれであれば
      zもxからみたQの知識の世界であろう.
      ⇒推移的であるだろう.

命題様相論理 (propositional modal logic)

- 公理系
  - どのような様相を論じるかによって採用される公理が異なる.
    真理論的様相にはS5=KT45(公理としてK, T, 4, 5を採用)が適切だが,
    認識論的様相にはS4=KT4 (公理としてK, T, 4を採用) が適切だと考えられている
    - 推論規則　pが証明されるならば$\Box p$も証明される
    - 公理K　$\Box(\varphi \supset \psi) \supset (\Box\varphi \supset \Box\psi)$
    - 公理T　$\Box\varphi \supset \varphi$
      (reflexive)
      必然的に真ならば，真
      Qがφを知っているならばφは真
    - 公理4　$\Box\varphi \supset \Box\Box\varphi$
      (transitive)
      必然的に真ならば，必然的に「必然的に真」
      Qがφを知っているならば
      Qは「Qがφを知っている」ことを知っている
    - 公理5　$\Diamond\varphi \supset \Box\Diamond\varphi$
      (Euclidean)
      真であることが可能ならば,
      真であることが可能なのは必然
      Qにとってφが知識と矛盾しないならば
      QはQにとってφが知識と矛盾しないことを
      知っている
      Qがφを知らないならば
      Qは「Qがφを知らない」ことを知っている

- 推論規則
  - 通常の命題論理の推論規則(ここでは自然演繹法(Natural Deduction)
    を用いる)に
    様相演算記号のための規則を追加する.

- 自然演繹法の推論規則

  (これにもいろいろな流儀があることに注意)

$$(\wedge I)\ \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi\wedge\psi} \qquad (\wedge E)\ \frac{\varphi\wedge\psi}{\varphi} \qquad \frac{\varphi\wedge\psi}{\psi}$$

$$(\vee I)\ \frac{\varphi}{\varphi\vee\psi} \qquad \frac{\psi}{\varphi\vee\psi} \qquad (\vee E)\ \frac{\varphi\vee\psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}$$

$$(\supset I)\ \frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\varphi\supset\psi} \qquad (\supset E)\ \frac{\varphi\supset\psi \quad \varphi}{\psi} \qquad (\neg I)\ \frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\varphi} \qquad (\neg E)\ \frac{\neg\varphi \quad \varphi}{\bot}$$

$$(\bot E)\ \frac{\bot}{\varphi} \qquad (\neg\neg E)\ \frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$$

ここで, $\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}$ は

φを仮定したときにψが証明されることを表し,

その直後の推論でφは仮定でなくなる

- 自然演繹法による**命題論理**の証明図の例

1	$p \wedge q$	仮定
2	p	$\wedge$E 1
3	q	$\wedge$E 1
4	$q \wedge p$	$\wedge$I 2, 3
5	$p \wedge q \supset q \wedge p$	$\supset$I 1-4

1	$p \wedge (q \vee r)$	仮定
2	p	$\wedge$E 1
3	$q \vee r$	$\wedge$E 1
4	q	仮定
5	$p \wedge q$	$\wedge$I 2, 4
6	$p \wedge q \vee p \wedge r$	$\vee$I 5
7	r	仮定
8	$p \wedge r$	$\wedge$I 2, 7
9	$p \wedge q \vee p \wedge r$	$\vee$I 8
10	$p \wedge q \vee p \wedge r$	$\vee$E 3, 4-6, 7-9
11	$p \wedge (q \vee r) \supset p \wedge q \vee p \wedge r$	$\supset$I 1-10

1	p	仮定
2	$\neg p$	仮定
3	$\perp$	$\neg$E 1, 2
4	$\neg\neg p$	$\neg$I 2-3
5	$p \supset \neg\neg p$	$\supset$I 1-4

1	$\neg\neg p$	仮定
2	p	$\neg\neg$E 1
3	$\neg\neg p \supset p$	$\supset$I 1-2

- 演習問題
  - 以下の命題論理の式を証明せよ
    1. $(p \supset q) \wedge (q \supset r) \supset (p \supset r)$
    2. $(p \vee q) \supset (q \vee p)$
    3. $(p \vee q) \wedge \neg p \supset q$

- 様相論理として追加される推論規則

破線の箱は接近可能な任意の可能世界での推論を表す.

$$(\Box I)\ \frac{\boxed{\varphi}}{\Box\varphi}$$

もし破線の箱の中でφが証明されるのならば,
(それは任意の可能世界で証明されたことになるので)
□φが証明できたことになる.

$$(\Box E)\ \frac{\Box\varphi}{\boxed{\varphi}}$$

もし□φが証明されるのならば,
破線の箱の中でφに関する証明をしてよい.

- KT45での追加規則

公理T, 4, 5の代わりに以下の同値な規則をおく.

$$(T)\ \frac{\Box\varphi}{\varphi} \qquad (4)\ \frac{\Box\varphi}{\Box\Box\varphi} \qquad (5)\ \frac{\neg\Box\varphi}{\Box\neg\Box\varphi}$$

- 演習問題
  - 以下の様相論理の式を証明せよ
    1. $\vdash_{K} \Box p \land \Box q \supset \Box(p \land q)$
    2. $\vdash_{KT} p \supset \Box \Diamond p$
    3. $\vdash_{KT} \Box \Diamond \Box p \supset p$

Multi-Agent Systemにおける知識の推論

- KT45^n
  - KT45を基礎とする.
    - □のかわりに，様相記号K_iを用いる.
      - K_i : 「agent iが知っている」
        - $i \in A = \{1, 2, \ldots, n\}$ agentsの集合
    - 例: $K_1 p \wedge K_1 \neg K_2 K_1 p$
      - agent 1はpを知っていて，
        agent 1はagent 2がagent 1はpを知っていることを
        知らないことを知っている.

- 様相記号E_G $(G \subseteq A)$
  - Gに属する全てのagentが知っている
    - $E_G\, p \equiv K_{j1} p \wedge \ldots \wedge K_{jm} p \qquad j_1, \ldots, j_m \in G$
- 様相記号C_G
  - Gに属するagentの間での「共通知識」
    - $C_G\, p \equiv E_G\, p \wedge E_G E_G\, p \wedge E_G E_G E_G\, p \wedge \ldots$

- 3人の賢者の形式化
    - p_i: iは白い印を付けている

知識 (問題に依存する公理) Γ

$C(p_1 \vee p_2 \vee p_3)$, $C(p_i \supset K_j\, p_i)$, $C(\neg p_i \supset K_j\, \neg p_i)$ (i, j=1, 2, 3, i≠j)

1

も同様)

3

$\Gamma \wedge C(\neg K_1 p_1 \wedge \neg K_1 \neg p_1) \wedge C(\neg K_2 p_2 \wedge \neg K_2 \neg p_2) \supset K_3 p_3$
ではない.

1番目の人が「わからない」といったことと

2番目の人が「わからない」といったことの

時間推移が反映されていない.

証明すべき事実

$\Gamma \wedge C(\neg K_1 p_1 \wedge \neg K_1 \neg p_1) \supset C(p_2 \vee p_3)$

$\Gamma \wedge C(p_2 \vee p_3) \wedge C(\neg K_2 p_2 \wedge \neg K_2 \neg p_2) \supset K_3 p_3$

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{ll} K_i & \\ & \vdots \\ & \phi \end{array}}}{K_i\phi}\,K_i\mathrm{i} \qquad \dfrac{\boxed{\begin{array}{ll} E_G & \\ & \vdots \\ & \phi \end{array}}}{E_G\phi}\,E_G\mathrm{i} \qquad \dfrac{\boxed{\begin{array}{ll} C_G & \\ & \vdots \\ & \phi \end{array}}}{C_G\phi}\,C_G\mathrm{i}$$

$$\dfrac{K_i\phi}{\boxed{\begin{array}{ll} K_i & \vdots \\ & \phi \\ & \vdots \end{array}}}\,K_i\mathrm{e} \qquad \dfrac{E_G\phi}{\boxed{\begin{array}{ll} E_G & \vdots \\ & \phi \\ & \vdots \end{array}}}\,E_G\mathrm{e} \qquad \dfrac{C_G\phi}{\boxed{\begin{array}{ll} C_G & \vdots \\ & \phi \\ & \vdots \end{array}}}\,C_G\mathrm{e}$$

$$\frac{K_i\,\phi \text{ for each } i \in G}{E_G\,\phi}\,KE \qquad \frac{E_G\,\phi \quad i \in G}{K_i\,\phi}\,EK_i \qquad \frac{C_G\,\phi}{E_G \ldots E_G\,\phi}\,CE$$

$$\frac{C_G\,\phi \quad i_j \in G}{K_{i_1} \ldots K_{i_k}\,\phi}\,CK \qquad \frac{C_G\,\phi}{C_G C_G\,\phi}\,C4 \qquad \frac{\neg C_G\,\phi}{C_G \neg C_G\,\phi}\,C5$$

$$\frac{K_i\,\phi}{\phi}\,KT \qquad \frac{K_i\,\phi}{K_i K_i\,\phi}\,K4 \qquad \frac{\neg K_i\,\phi}{K_i \neg K_i\,\phi}\,K5$$

1	$C(p_1 \vee p_2 \vee p_3)$	premise
2	$C(p_i \to K_j\, p_i)$	premise, $(i \neq j)$
3	$C(\neg p_i \to K_j \neg p_i)$	premise, $(i \neq j)$
4	$C\neg K_1\, p_1$	premise
5	$C\neg K_1 \neg p_1$	premise
6	C	
7	$\neg p_2 \wedge \neg p_3$	assumption
8	$\neg p_2 \to K_1 \neg p_2$	Ce 3 $(i,j) = (2,1)$
9	$\neg p_3 \to K_1 \neg p_3$	Ce 3 $(i,j) = (3,1)$
10	$K_1 \neg p_2 \wedge K_1 \neg p_3$	prop $7, 8, 9$
11	$K_1 \neg p_2$	$\wedge$e$_1$ 10
12	$K_1 \neg p_3$	$\wedge$e$_2$ 10
13	K_1	
14	$\neg p_2$	K_1e 11
15	$\neg p_3$	K_1e 12
16	$\neg p_2 \wedge \neg p_3$	$\wedge$i $14, 15$
17	$p_1 \vee p_2 \vee p_3$	Ce 1
18	p_1	prop 16, 17
19	$K_1\, p_1$	K_1i 13–18
20	$\neg K_1\, p_1$	Ce 4
21	$\bot$	$\neg$e $19, 20$
22	$\neg(\neg p_2 \wedge \neg p_3)$	$\neg$i 7–21
23	$p_2 \vee p_3$	prop 22
24	$C(p_2 \vee p_3)$	Ci 6–23

1	$C(p_1 \vee p_2 \vee p_3)$	premise
2	$C(p_i \rightarrow K_j\, p_i)$	premise, $(i \neq j)$
3	$C(\neg p_i \rightarrow K_j\, \neg p_i)$	premise, $(i \neq j)$
4	$C\neg K_2\, p_2$	premise
5	$C\neg K_2\, \neg p_2$	premise
6	$C(p_2 \vee p_3)$	premise
7	K_3	
8	$\neg p_3$	assumption
9	$\neg p_3 \rightarrow K_2\, \neg p_3$	CK 3 $(i,j) = (3,2)$
10	$K_2\, \neg p_3$	$\rightarrow$e $9, 8$
11	K_2	
12	$\neg p_3$	K_2e 10
13	$p_2 \vee p_3$	Ce 6
14	p_2	prop $12, 13$
15	$K_2\, p_2$	K_2i 11–14
16	$K_i\, \neg K_2\, p_2$	CK 4, for each i
17	$\neg K_2\, p_2$	KT 16
18	$\perp$	$\neg$e $15, 17$
19	p_3	PBC 8–18
20	$K_3\, p_3$	K_3i 7–19

- 補足
  - ユークリッド的関係$R(x, y) \wedge R(x, z) \supset R(y, z)$が成立っているとき, world a, c間に$R(a, c)$なる関係があれば, $R(a, c) \wedge R(a, c) \supset R(c, c)$より$R(c, c)$が成立する.
  - ユークリッド的関係が成立つ, world a, b, cのみのモデルを考え, $R(a, b)$, $R(a, c)$とする.
    このとき$R(b, c)$であるが,
    $a \models \Diamond p$, $c \models p$と仮定すると, $R(b, c)$より$b \models \Diamond p$, $R(c, c)$より$c \models \Diamond p$.
    したがって$a \models \Box\Diamond p$.