

**使ってみよう!部分空間法**

**Ausgang**

**-非線形部分空間法-**

河原智一，坂野 鋭，堀田政二

部分空間法研究会 2010年7月26日

# 概要

1. 何故，非線形部分空間法を考えるのか？
2. 「非線形主成分分析」．ベタな例．
3. 核と核非線形主成分分析
4. 核非線形部分空間法，核非線形相互部分空間法とその応用

# 概要

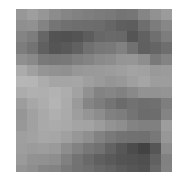
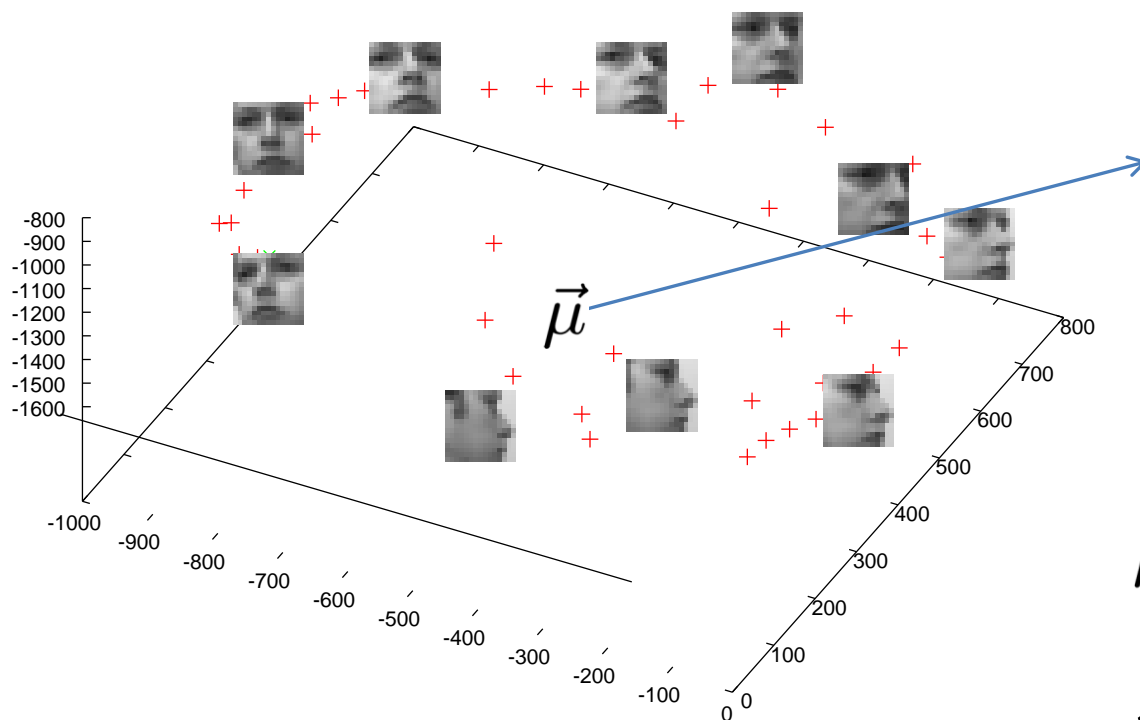
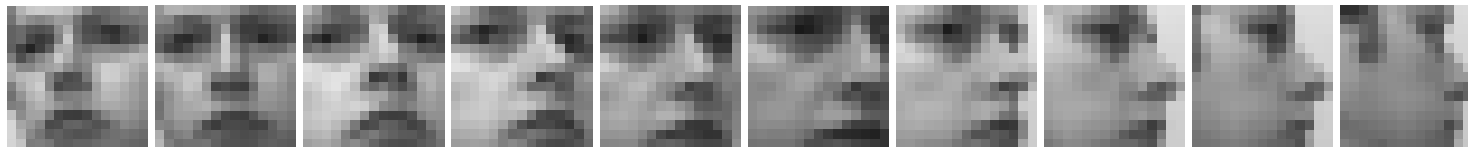
1. 何故，非線形部分空間法を考えるのか？
2. 「非線形主成分分析」．ベタな例．
3. 核と核非線形主成分分析
4. 核非線形部分空間法，核非線形相互部分空間法とその応用

# 何故， 非線形部分空間法を考えるのか？

- 何だかよくわからないけど「非線形分布」としか呼びようが無いものが実在するから。
- そういうものが無いのに考えるのはあまり賢い考え方では無い
  - 今だから白状しますが，僕も昔そういうことをやっていました。

# 非線形分布ってどういうもの？

## -実験的に-



平均すると  
顔では無い

$$x_1, \dots, x_m \in F$$

$$\vec{\mu} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i \notin F$$

⇒非線形分布!?

- 画像のあるところが学習データ，+は未知データ
- UMIST顔画像DBの画像を主成分分析<sup>[1]</sup>

# 概要

1. 何故，非線形部分空間法を考えるのか？
2. 「非線形主成分分析」．ベタな例．
3. 核と核非線形主成分分析
4. 核非線形部分空間法，核非線形相互部分空間法とその応用

# 色々な非線形主成分分析

- Gnanadesikanの方法<sup>[3]</sup>
  - 高次多項式への変換を考える。
- 入江の方法<sup>[4]</sup>
  - 多層パーセプトロンの利用
- 90年代まではうまい方法が無かった。
- どう，うまくないのでしょうか？

# Gnanadesikanの方法(1)

2次の主成分分析 (2次元)

$$(x, y) \rightarrow (x, y, x^2, y^2, xy)$$

2次の主成分分析 (3次元)

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y, z, x^2, y^2, z^2, yz, xz, xy)$$

3次の主成分分析 (2次元)

$$(x, y) \rightarrow (x, y, x^2, y^2, xy, x^3, y^3, x^2y, xy^2)$$

この様な変換で非線形変換してから普通の主成分分析を行う。

任意の次数の非線形主成分分析が構成出来る。

低次元のデータでは良好に動作する (判別分析への応用例が [5]) .



# Gnanadesikanの方法(2)

次元数が非常に大きくなる． $d$  次元のデータに対して2次の非線形主成分分析は

$$2d + \frac{d(d-1)}{2}$$

ちなみに3次だと

$$3d + \frac{d(d-1)}{2} + \frac{d(d-1)(d-2)}{3}$$

次行列の対角化を扱うことになる．

原空間が100次元の時，2次の非線形主成分分析は5150次元の問題になる→使いにくい

簡略版を文字認識に適用した例はある[6]．

# 概要

1. 何故，非線形部分空間法を考えるのか？
2. 「非線形主成分分析」．ベタな例．
3. **核と核非線形主成分分析**
4. 核非線形部分空間法と核非線形相互部分空間法
5. 核非線形相互部分空間法の応用

# 核，核関数，カーネルマシン

- ・ 最近話題常識の非線形認識手法<sup>[7]</sup>。
- ・ 元々は60年代のAizermanらの ポテンシャル関数法 <sup>[8]</sup>。
- ・ 非線形機械が便利に使える
- ・ 色々難しい話もあるけど，出来るだけ実用的に (難しい話は赤穂<sup>[7]</sup>，前田<sup>[9]</sup>などを参照)。

# 核による非線形化のプロセス

- 従来からある線形なアルゴリズムを内積だけの計算に書き換える。
- 内積を適切な核と置き換える

⇒新非線形アルゴリズム完成！

実際，1998-2005年くらいまではこうした論文がたくさん見られた。（簡単に量産出来た）

でも「核」って一体何？

# 核とは何か

代数方程式

$$A\vec{e} = \lambda'\vec{e}$$

ここで座標のインデックスを  
整数から実数に拡張している。

と等価な積分方程式

$$\psi(x) = \lambda \int k(x, x')\psi(x')dx'$$

において  $k(x, x')$  を「核」もしくは「積分核」という。

-kernel の元々の意味は「種」 ([www.alc.co.jp](http://www.alc.co.jp) ではレベル7)

どうやって利用するんでしょう？

ちょっと数学的な準備をします。

# 核とは何か

代数方程式

$$A\vec{e} = \lambda'\vec{e}$$

ここで座標のインデックスを  
整数から実数に拡張している。

と等価な積分方程式

$$\psi(x) = \lambda \int k(x, x') \psi(x') dx'$$

において  $k(x, x')$  を「核」もしくは「積分核」という。

-kernel の元々の意味は「種」 ([www.alc.co.jp](http://www.alc.co.jp) ではレベル7)

どうやって利用するんでしょう？

ちょっと数学的な準備をします。

# 核の展開

代数方程式

$$A\vec{e} = \lambda' \vec{e}$$

積分方程式

$$\psi(x) = \lambda \int k(x, x') \psi(x') dx'$$

を満たす行列 (核) は,  
固有値, 固有ベクトル (関数) を用いて

$$A = \sum_{i=1}^m \lambda'_i \vec{e}_i \vec{e}_i^\top \quad k(x, x') = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \psi_i(x) \psi_i(x')$$

の様に展開出来る。

# 核の展開の解釈

変数  $x$  を

$$k(x, x') = \psi(x) \cdot \psi(x')$$

$$\psi(x) = (\sqrt{\lambda_1}\psi_1(x), \sqrt{\lambda_2}\psi_2(x), \dots)$$

の様な高次元 (時として無限次元) のベクトルに変換したものと解釈できる。

核はこの様な高次元空間の内積と考えて良い。

⇒内積の代わりにある核を使うことは

その核に対応する非常に高次元の

非線形変換を行ったことと等しい⇒便利



# ポテンシャル関数法

## -最初のカーネルマシン-

- $m$ 個の学習パターンを全て記憶し

$$p(\vec{x}) = \sum_{i=1}^m k(\vec{x}_i, \vec{x})$$

- を識別関数として用いる.

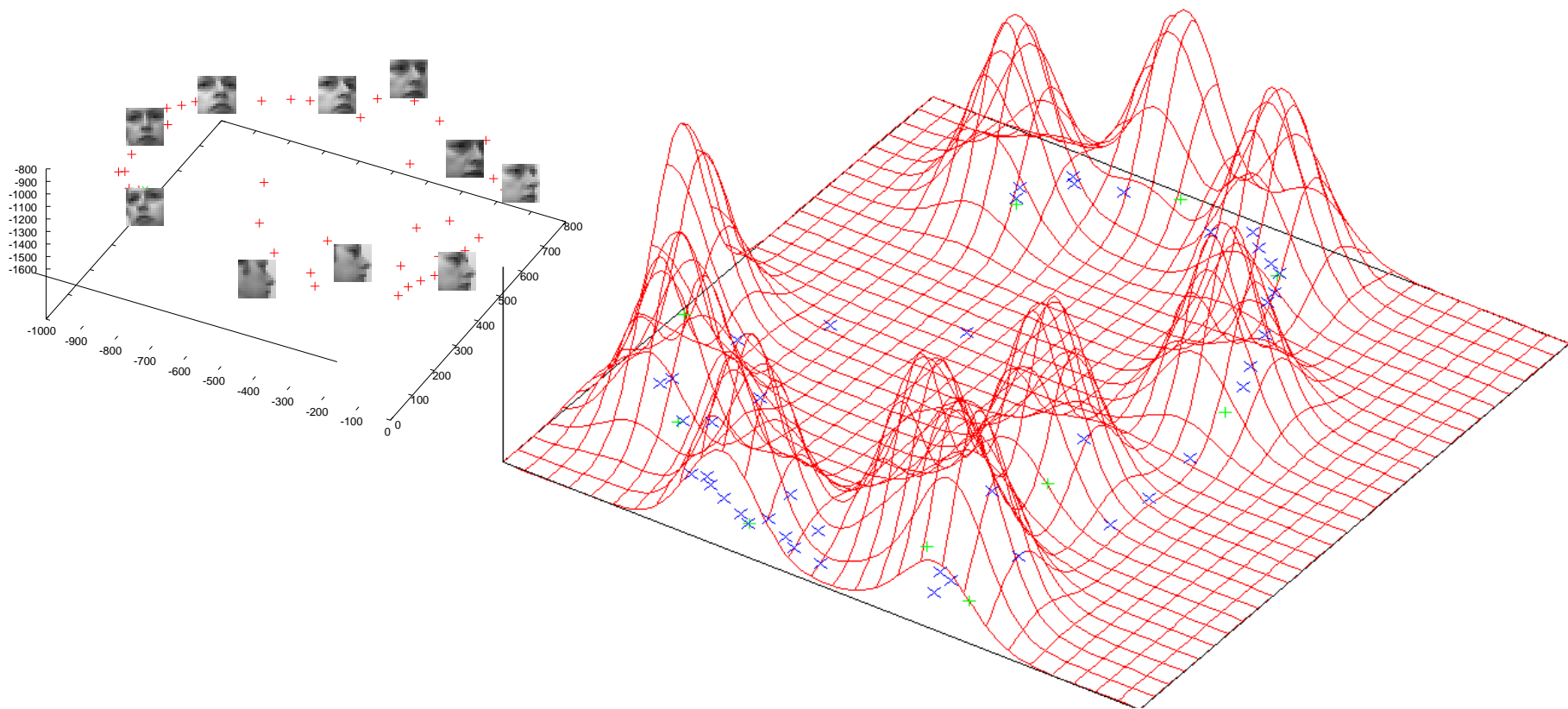
- $k$ としては

$$\exp\left(\frac{-\|\vec{x} - \vec{y}\|^2}{\sigma^2}\right)$$

- 等が用いられる

- 類似度 = 内積 → 核と考えると素直に理解できる.

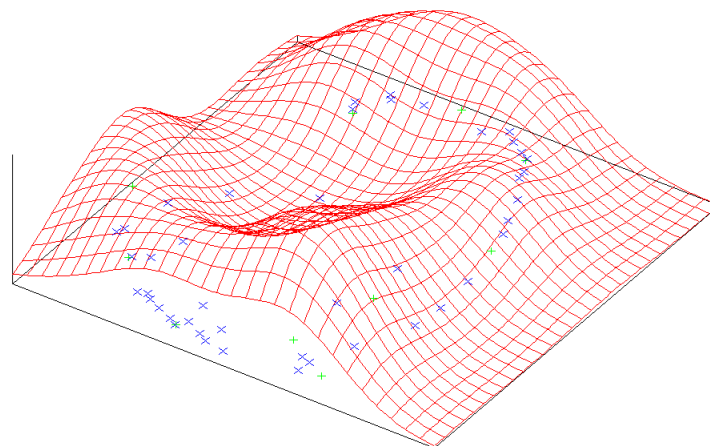
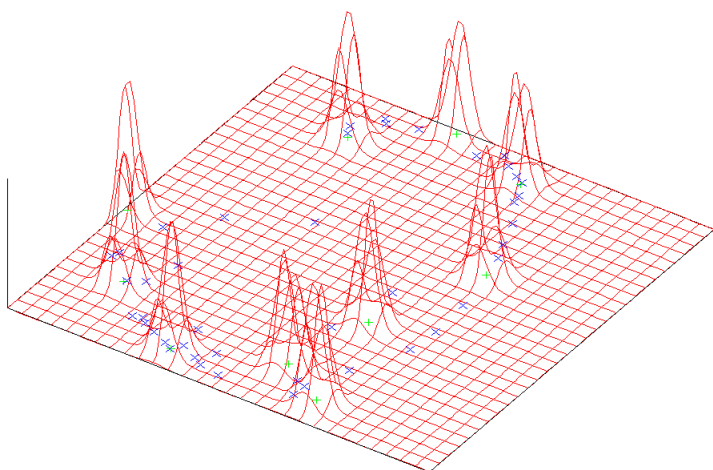
# ポテンシャル関数法の動作(1)



複雑な識別面を作ったり，サンプルをぼかして対雑音性能を上げたりできる

- 画像のあるところが学習データ.+, ×は未知データ
- UMIST顔画像DBを利用<sup>[1]</sup>

# ポテンシャル関数法の動作(2)



カーネルパラメータ  $\sigma$  により様々な形に密度関数を近似できる。 $\sigma$  が小さいほどデータの情報を重視した近似になる。

# ちょっと改良してみよう

$m$ 個の学習パターンを全て記憶

ここを改良する手もある

$$p(\vec{x}) = \sum_{i=1}^m k(\vec{x}_i, \vec{x})$$

例えば,

$$g(\vec{x}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i k(\vec{x}_i, \vec{x})$$

こうしてみる.  $\alpha$  を変えることで色々な情報処理が出来る  
じゃあ, どういう風に  $\alpha$  を変えるの?

⇒ Support Vector Machine, Kernel PCA

# 核による非線形化のプロセス (再掲)

- 従来からある線形なアルゴリズムを内積だけの計算に書き換える。
- 内積を適切な核と置き換える

⇒新非線形アルゴリズム完成!

- このプロセスに従って Kernel PCAを作ってみましょう。

# 従来からある線形の主成分分析(1)

簡単のため,  
データの重心が原点と一致している場合を考える

$m$ 個のデータがある場合の  $n$ 次元データ行列

$$X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)$$

を考える。普通の主成分分析は分散共分散行列  $X^t X$  の固有値問題

$$X^T X \vec{V} = \lambda \vec{V}$$

として与えられる。これは  $n \times n$  行列の対角化で求解できる。  
 $m \ll n$  の場合の解法としてよく知られている通り、

# 従来からある線形の主成分分析(2)

グラム行列  $XX^T$  の固有値問題を考えると、固有ベクトル  $\alpha$ 、固有値  $\lambda$  は

$$XX^T \vec{\alpha} = \lambda \vec{\alpha}$$

の解として与えられる。  
 $\vec{v}$  と  $\alpha$  は

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1}^m \alpha_i X$$

という関係で結ばれている<sup>[10]</sup>。

# 従来からある線形の主成分分析(3)

従って、主成分分析のアルゴリズムは  
グラム行列

$$C_{ij} = (\vec{x}_i, \vec{x}_j)$$

の対角化と得られた固有ベクトルを

$$\vec{V} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1}^m \alpha_i X$$

で写像して分散共分散行列の  
固有ベクトルを計算する。  
という風に構成出来る。

$X$ を成分で書いて両辺に写像すべきデータをかけると

$$\vec{V} \cdot \vec{x} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1}^m \alpha_i (\vec{x}_i \cdot \vec{x})$$

となつて全て内積  
で書けた



# Pseudo code

## 主成分分析

- $C = D' * D;$
- $[evec, eval] = eig(C)$

核を使うとMATLAB等の機能が使えなくて実装は大変になることが多い

## 核非線形主成分分析

- for  $i=1:dn$ 
  - for  $j=1:dn$ 
    - $K(I, j) = \exp((D(I, :) - D(j, :))^2 / \sigma^2);$
  - end
- end
- $[evec, eval] = eig(K/dn)$
- for  $i=1:dn$ 
  - $evecs(:, i) = evec(:, i) / \sqrt{eval(i)};$
- end

# 内積を適切な核と置き換える

グラム行列は

$$C_{ij} = (\vec{x}_i, \vec{x}_j) \longrightarrow K_{ij} = k(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$$

写像は

$$\vec{V} \cdot \vec{x} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1}^m \vec{\alpha}_i(\vec{x}_i, \vec{x}) \longrightarrow \vec{V} \cdot \vec{x} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1}^m \alpha_i k(\vec{x}_i, \vec{x})$$

となって

Kernel Principal Component analysis

完成!

# 概要

1. 何故，非線形部分空間法を考えるのか？
2. 「非線形主成分分析」．ベタな例．
3. 核と核非線形主成分分析
4. **核非線形部分空間法，核非線形相互部分空間法とその応用**

# 核非線形部分空間法

最初の Kernel Based Subspace method<sup>[11]</sup>

$x$ が正規化されていると考えると

$$\vec{V} \cdot \vec{x} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1}^m \alpha_i k(\vec{x}_i, \vec{x})$$

そのものを識別規則として用いることができる。

# 核非線型相互部分空間法

核な部分空間法が出来たのなら相互部分空間法も出来るはず，という単純な発想<sup>[12]</sup>。

辞書側

$$V = \sum_{i=1}^m \alpha_i \psi(x)$$

入力側

$$V' = \sum_{j=1}^l \alpha'_j \psi(x')$$

従って，基底の内積は

$$V \cdot V' = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l \alpha \alpha' \psi(x) \psi(x') = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l \alpha \alpha' k(x, x')$$

基底の内積が計算出来たので，後は普通の相互部分空間法

# 物体認識実験の例

## -ETH80 animals-

- 2自由度で回転する剛体画像のDB<sup>[13]</sup>.
- (多分) 湾曲構造
- 文献[14]と同じ実験条件.
- ただしカーネルパラメタ, 辞書側次元数, 入力側次元数, 使う正準角の数は色々変えて

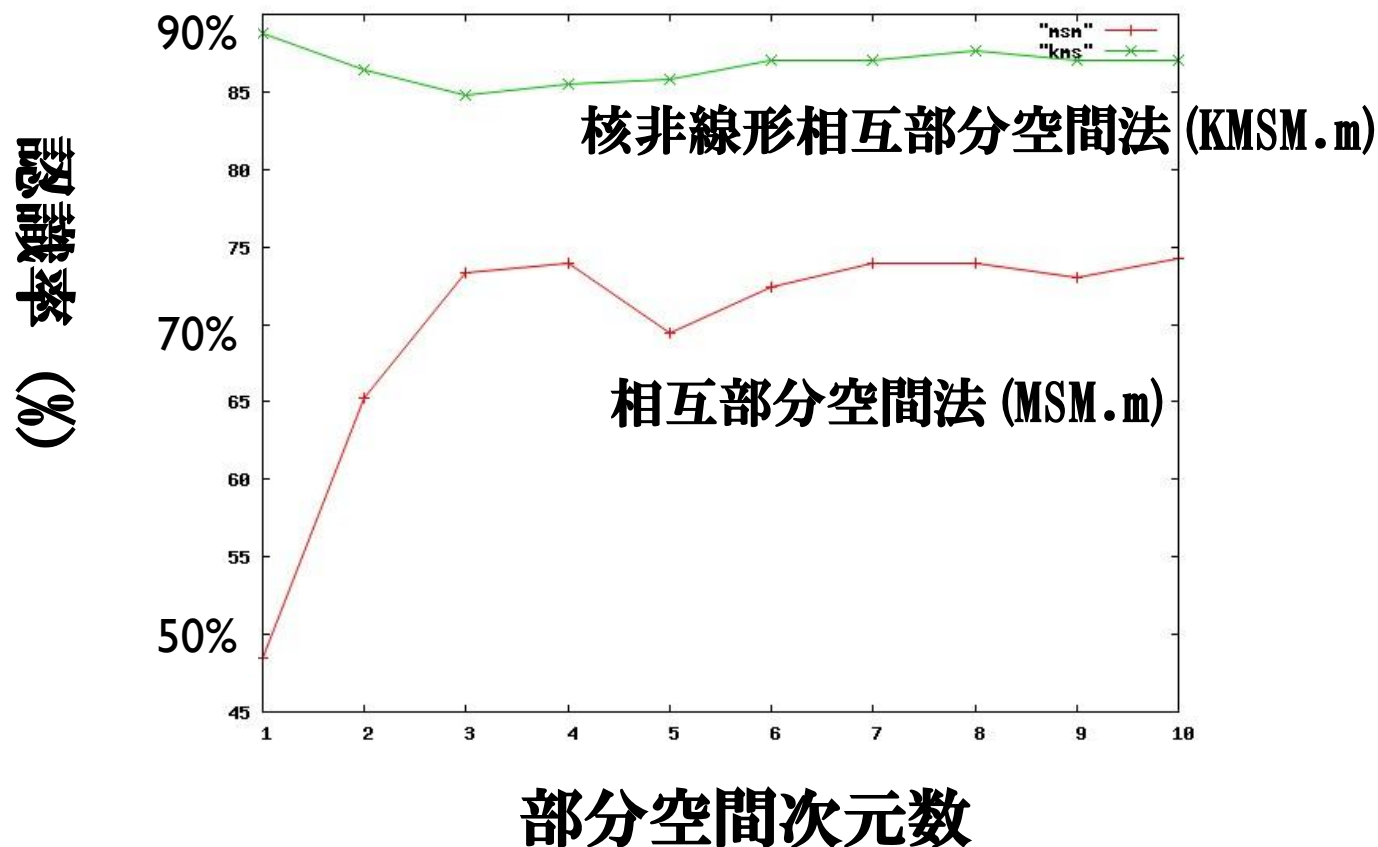


# ETH80 animalsのクラス



# ETH80物体認識実験結果

堀田先生配布のMSM.m と KMSM.m を用いて実験。  
Kernelizeしたことで劇的に認識率が向上する。





# ETH80物体認識実験結果

- 今回の実験は簡単のため，入力側，辞書側次元数を同じにしているが色々パラメータを振ったり，前処理をMATLAB Toolboxに変えたりすると認識率が変わる
- 配布プログラムでいろいろ試してください（最後に堀田先生から説明があります）
- これまで最高 99.7% 詳細はPRMU/CVIM9月研究会にて発表予定。

# 最後に注意事項

- **核非線形 (相互) 部分空間法は非線形分布を相手にした時に高い認識率を達成する。**
  - 柔物体，音声，ジェスチャ認識，宇宙機の異常検出などにも応用例がある<sup>[15-18]</sup>。
- **しかし (当然?)，相手が線形の時には無力。**
  - 正面顔，高度な特徴抽出した文字認識問題などでは認識率が上がらない (下がる場合もある)。
- **処理量は大。実装も面倒。**

**Thank you for your  
attention!**

**Let's use Subspace  
Method!!**

# 参考文献

- [1] D. B. Graham and N. S. Allinson, " [Characterizing Virtual Eigensignatures for General Purpose Face Recognition](#)," in H. Wechsler, et al. ed. " Face Recognition From Theory to Applications ", Springer Verlag, (1998)
- [2] 村瀬洋, S. Nayer, [2次元照合による3次元物体認識—パラメトリック固有空間法—](#), 電子情報通信学会論文誌 D, Vol.J77-D2, No.11, pp.2179-2187, 1994
- [3] R. ニャナデシカン, [統計的多変量データ解析](#), 日科技連, 1979
- [4] 入江 文平 川人 光男, [多層パーセプトロンによる内部表現の獲得](#), 電子情報通信学会論文誌 D Vol.J73-D2 No.8 pp.1173-1178, 1990. 論文では「特徴抽出」という言い方をしているがやっていることは間違いなく非線形主成分分析である.
- [5] 佐藤新, 坂野鋭, 松永務, [非線形構造に着目した識別ルール抽出法](#), 信学技報PRMU2003-34, (2003.6.20)
- [6] 坂野 鋭, 横塚 志行, 木田 博巳, 非線形主成分分析による投影距離法, 画像の認識と理解シンポジウム MIRU'92, (1992), 電子情報通信学会, 情報処理学会
- [7] 赤穂昭太郎: [カーネル多変量解析—非線形データ解析の新しい展開](#), 岩波書店 (2008).
- [8] Aizerman, M. A., Braverman, E. M. and Rozonoer, L. I.: 学習とパターン認識: パターン認識と学習制御: 機械学習理論におけるポテンシャル関数法 (原著露語) (1970), (共立出版 (1978)) .
- [9] 藤吉弘亘, 山下隆義, 岡田和典, 前田英作, ノジク・ヴァンソン, 石川 尋代, ドゥソルピエ・フランソワ, [コンピュータビジョン最先端ガイド2](#) —Mean-Shift, Kernel Method, Local Image Features, GPU—, アドコムメディア, (2010)
- [10] C. M. ビショップ, [パターン認識と機械学習 下](#) - ベイズ理論による統計的予測, シュプリンガー・ジャパン, (2008)
- [11] 前田 英作, 村瀬 洋, [カーネル非線形部分空間法によるパターン認識](#), 信学論, Vol.J82-D2 No.4 pp.600-612, (1999)
- [12] 坂野 鋭, 武川直樹, 中村太一, [核非線形相互部分空間法による物体認識](#), 電子情報通信学会論文誌D-II J84-D-II, pp. 1549-1556, (2001)
- [13] Bastian Leibe and Bernt Schiele, [Analyzing Appearance and Contour Based Methods for Object Categorization](#). in Proc. CVPR03, (2003)
- [14] 福井和広, 山口修, ["カーネル非線形制約相互部分空間法による物体認識"](#), 電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol.J88-D-II, no.8, pp.1349-1356, (2005).
- [15] 市野将嗣, 坂野鋭, 小松尚久, [核非線形相互部分空間法による話者認識](#), 電子情報通信学会論文誌D-II, J88-D-II, (2005)
- [16] 市野将嗣, 坂野鋭, 小松尚久, [話者認識における核非線形相互部分空間法の適用と有効性に関する一考察](#), 画像の認識・理解シンポジウム (MIRU2008) サテライトワークショップ部分空間法研究会Subspace2008, 2008年7月
- [17] B. Zhang, et. al, Combination of selforganization map and kernel mutual subspace method for video surveillance, Advanced Video and Signal Based Surveillance, 2007. p. 123
- [18] 藤巻, 矢入, 町田, [カーネル特徴空間における正準角を利用した宇宙機異常検知法](#), 第20回人工知能学会全国大会, 2A3-1, 2006