

# 部分空間法を用いたリモートセンシング 画像の土地被覆分類

Subspace method in remote sensing data land cover classification

ハスバガン (Hasi Bagan)

国立環境研究所 地球環境研究センター

竹内渉

東京大学 生産技術研究所

山形与志樹

国立環境研究所 地球環境研究センター

*Subspace 2010*

*July 26, 2010, Kushiro, Hokkaido*

# 内容

1. リモートセンシングにおける応用と現状
2. 部分空間法による土地被覆分類の仕組み
3. ハイパースペクトル画像への応用
4. マルチスペクトル衛星画像への応用
5. Polarimetric PALSAR画像への応用
6. 結論と今後の課題

# 内容

1. リモートセンシングにおける応用と現状
2. 部分空間法による土地被覆分類の仕組み
3. ハイパースペクトル画像への応用
4. マルチスペクトル衛星画像への応用
5. Polarimetric PALSAR画像への応用
6. 結論と今後の課題

1996年 山形与志樹 部分空間法によるミクセル分解

釧路湿原で、288チャンネルの航空機高次元CASI画像を使って、湿原植生のミクセル分解に成功した。

2006年 新井康平 部分空間法によるミクセル分解

学習部分空間法をミクセル分解へ応用した。

2008年 部分空間法による土地被覆分類

航空機ハイパースペクトル画像（48バンドと191バンド）を使って、土地被覆分類での有効性を確認。

2009年 部分空間法のパラメータ選択

高次元画像分類で、部分空間の次元数とパラメータを適当に選択すれば、訓練用サンプルを完全に識別できる事を明らかにした。

2010年 マルチスペクトル衛星画像分類

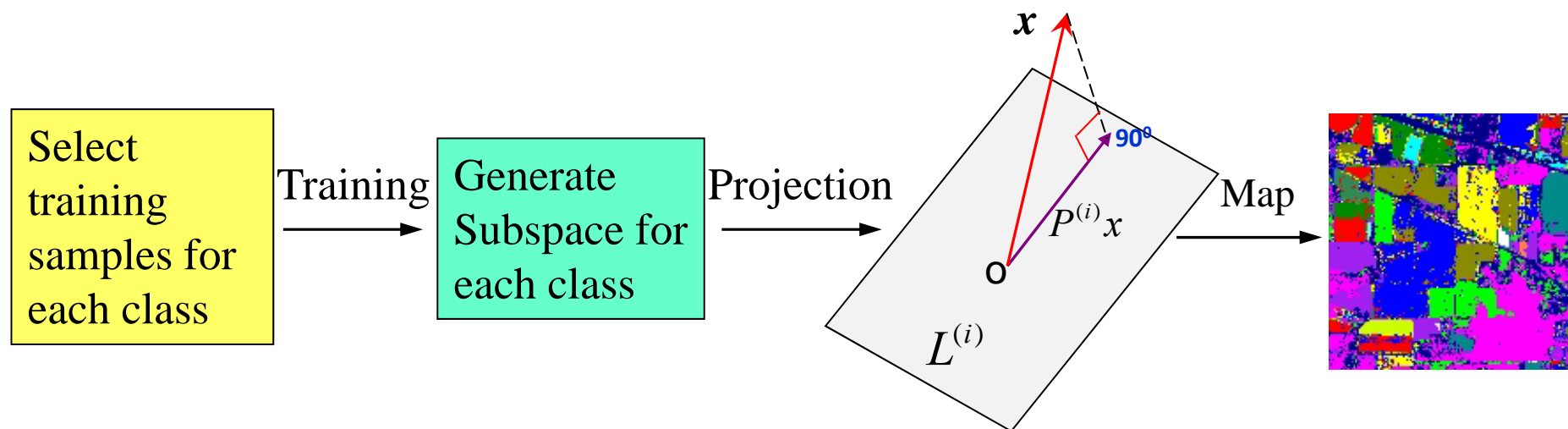
TM, ASTER等マルチスペクトル衛星画像分類に拡張した。更に、複合類似度法(MSM)と部分空間法を組み合わせた手法を提案した。

# 内容

1. リモートセンシングにおける応用と現状
2. 部分空間法による土地被覆分類の仕組み
3. ハイパースペクトル画像への応用
4. マルチスペクトル衛星画像への応用
5. Polarimetric PALSAR画像への応用
6. 結論と今後の課題

## 部分空間法の分類ステップ

- トレーニングサンプルを選ぶ
- クラスの部分空間を作る
- 画像ピクセルの射影を計算
- 分類図を出す



## 六バンドTM衛星画像の例

水，砂漠，植生，草地，裸地の五種類の土地被覆クラスを設計して、各クラスごとに50ピクセルのサンプルを選ぶ

植生を例として、サンプルの6×6自相関行列を計算

サンプルピクセル1のDN値

$$\frac{1}{50} \times \begin{pmatrix} 61 & 65 & 64 & \vdots & 71 & 70 & 66 & 66 \\ 30 & 32 & 30 & \vdots & 39 & 35 & 33 & 32 \\ 28 & 36 & 30 & \vdots & 45 & 43 & 31 & 31 \\ 123 & 106 & 105 & \vdots & 109 & 104 & 194 & 202 \\ 80 & 87 & 82 & \vdots & 123 & 111 & 140 & 149 \\ 24 & 29 & 23 & \vdots & 50 & 43 & 44 & 43 \end{pmatrix}_{(6, 50)} \times \begin{pmatrix} 61 & 30 & 28 & 123 & 80 & 24 \\ 65 & 32 & 36 & 106 & 87 & 29 \\ 64 & 30 & 30 & 105 & 82 & 23 \\ 63 & 28 & 31 & 135 & 83 & 27 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 70 & 35 & 43 & 104 & 111 & 43 \\ 66 & 33 & 31 & 194 & 140 & 44 \\ 66 & 32 & 31 & 202 & 149 & 43 \end{pmatrix}_{(50, 6)}$$

$$= \begin{pmatrix} 4660.18 & 2279.84 & 2630.92 & 8572.90 & 7148.76 & 2559.98 \\ 2279.84 & 1127.08 & 1312.22 & 4145.12 & 3545.70 & 1288.54 \\ 2630.92 & 1312.22 & 1551.04 & 4695.38 & 4140.40 & 1534.78 \\ 8572.90 & 4145.12 & 4695.38 & 16401.84 & 13059.76 & 4543.74 \\ 7148.76 & 3545.70 & 4140.40 & 13059.76 & 11285.90 & 4116.40 \\ 2559.98 & 1288.54 & 1534.78 & 4543.74 & 4116.40 & 1554.82 \end{pmatrix}_{(6, 6)} \quad \text{実対称自相関行列}$$

# ヤコビ方法で固有値及び固有ベクトルを計算

実対称行列

単位行列

$$\begin{pmatrix} 4660.18 & 2279.84 & 2630.92 & 8572.90 & 7148.76 & 2559.98 \\ 2279.84 & 1127.08 & 1312.22 & 4145.12 & 3545.70 & 1288.54 \\ 2630.92 & 1312.22 & 1551.04 & 4695.38 & 4140.40 & 1534.78 \\ 8572.90 & 4145.12 & 4695.38 & 16401.84 & 13059.76 & 4543.74 \\ 7148.76 & 3545.70 & 4140.40 & 13059.76 & 11285.90 & 4116.40 \\ 2559.98 & 1288.54 & 1534.78 & 4543.74 & 4116.40 & 1554.82 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \text{初期} \begin{pmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{pmatrix}$$

41回目で、非対角の値が0に十分近付いたので、循環を停止

$$\begin{pmatrix} 65.9241 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.3705 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 5.0498 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 35718.2959 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 777.1745 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 13.0453 \end{pmatrix} \longleftrightarrow 41\text{回} \begin{pmatrix} 0.7583 & -0.1977 & -0.4589 & 0.3596 & 0.0439 & -0.2100 \\ 0.2669 & 0.9124 & 0.2177 & 0.1762 & 0.1266 & -0.0429 \\ 0.3337 & -0.3368 & 0.7315 & 0.2029 & 0.2967 & 0.3330 \\ -0.1706 & 0.0071 & 0.0782 & 0.6700 & -0.6868 & 0.2101 \\ -0.4340 & -0.0798 & 0.0266 & 0.5568 & 0.5028 & -0.4917 \\ -0.1580 & 0.0925 & -0.4473 & 0.1989 & 0.4117 & 0.7465 \end{pmatrix}$$

固有値

固有ベクトル

固有値を降順で並べる : 35718.2959 777.1745 65.9241 13.0453 5.0498 1.3705

対応した固有ベクトル

$$\begin{pmatrix} 0.3596 & 0.0439 & 0.7583 & -0.2100 & -0.4589 & -0.1977 \\ 0.1762 & 0.1266 & 0.2669 & -0.0429 & 0.2177 & 0.9124 \\ 0.2029 & 0.2967 & 0.3337 & 0.3330 & 0.7315 & -0.3368 \\ 0.6700 & -0.6868 & -0.1706 & 0.2101 & 0.0782 & 0.0071 \\ 0.5568 & 0.5028 & -0.4340 & -0.4917 & 0.0266 & -0.0798 \\ 0.1989 & 0.4117 & -0.1580 & 0.7465 & -0.4473 & 0.0925 \end{pmatrix} = \{V_{i,j}\} \Rightarrow \text{部分空間を作る}$$



$\{V_{i,j}\}$ の前の $n$ 個の固有ベクトルで、部分空間を作る

$$\{V_{i,j} | j = 1, \dots, n\} \quad (n < d)$$

固有ベクトル  $V_{i,j}$  で、 $i$  はクラスの番号、 $j$  は  $i$  クラスの  $j$  番目のベクトル； $d$  はベクトル空間の次元でバンド数と等しい。

ピクセル $x$ の射影を計算、分類図を作成

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n [x^T V_{i,j}]^2$$

この式は射影の平方を得られますが、計算速度を考慮し、プログラムで射影の代わりに射影の平方を使う。

# 部分空間法の拡張：平均学習部分空間法

## Averaged Learning Subspace Method: ALSM

$$1 \quad S_0^{(i)} = \sum_{x \in \omega^{(i)}} xx^T, \quad i = 1, 2, \dots, c$$

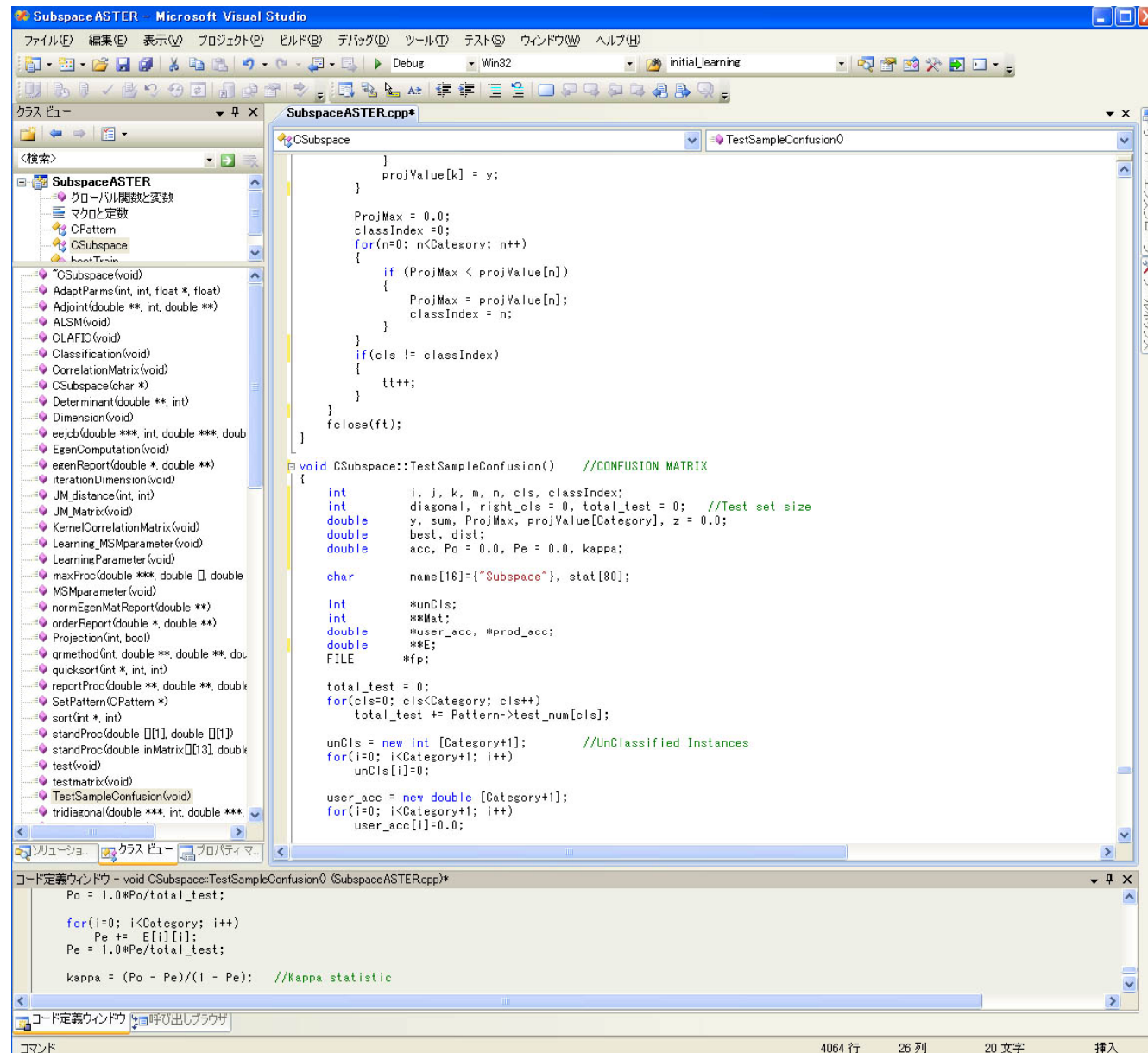
部分空間の次元数 $n$ を固定する。 $n$ 個の主要固有値に対応する固有ベクトルを部分空間の基底とする。

$$2 \quad S_k^{(i)} = S_{k-1}^{(i)} + \alpha \sum_{x_m \in A_j} x_m x_m^T - \beta \sum_{x_n \in B_i} x_n x_n^T$$

集合 $A_j$ はクラス  $\omega_j$  のサンプルは、別のクラスに誤分類されたサンプルの集合である。 $B_i$ は  $\omega_i$  に誤分類された別のクラスのサンプルの集合である。

- 3 部分空間の回転：事前に設定した終了条件に達するまで1と2を繰り返す。これによって、部分空間の重なりを減らして、分類精度を改善できる。

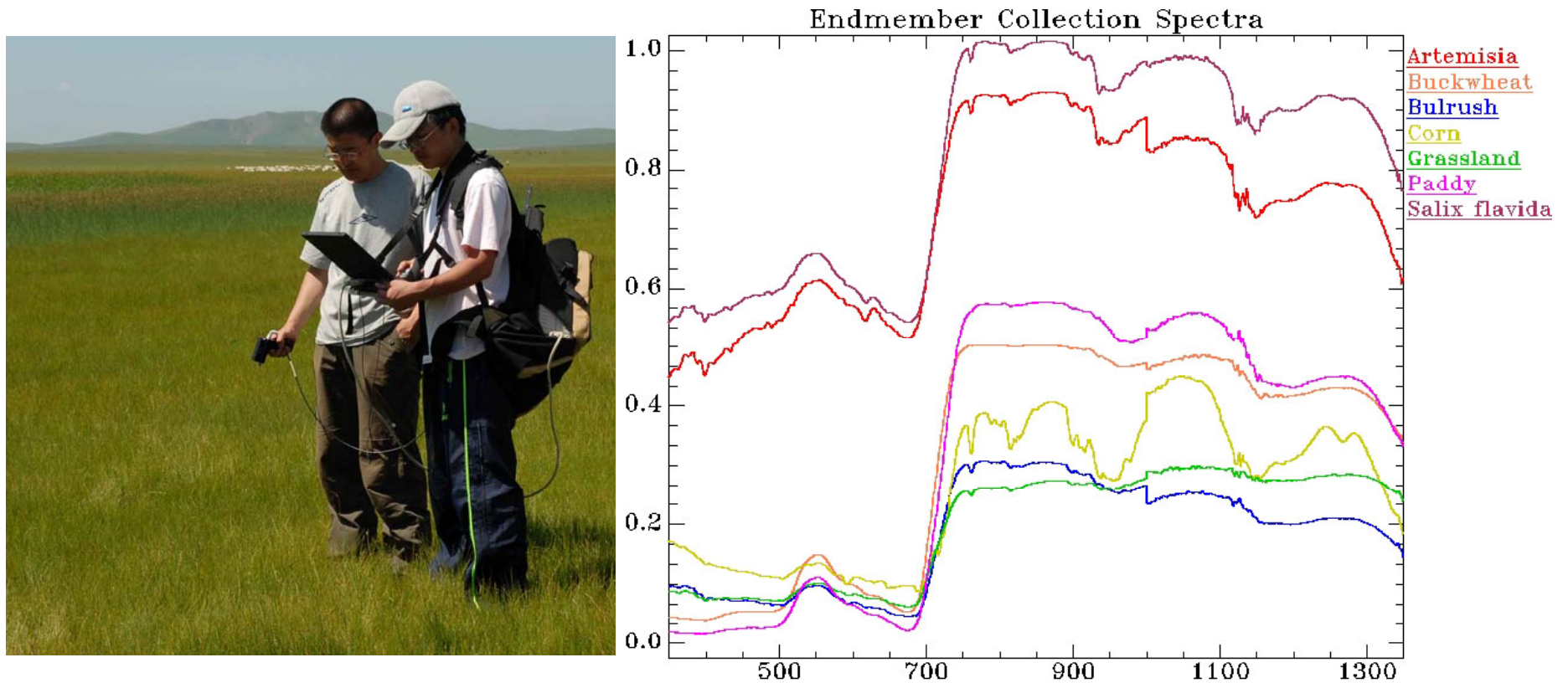
# C++言語でコード化し、簡単に拡張できる



# 内容

1. リモートセンシングにおける応用と現状
2. 部分空間法による土地被覆分類の仕組み
3. **ハイパースペクトル画像への応用**
4. マルチスペクトル衛星画像への応用
5. Polarimetric PALSAR画像への応用
6. 結論と今後の課題

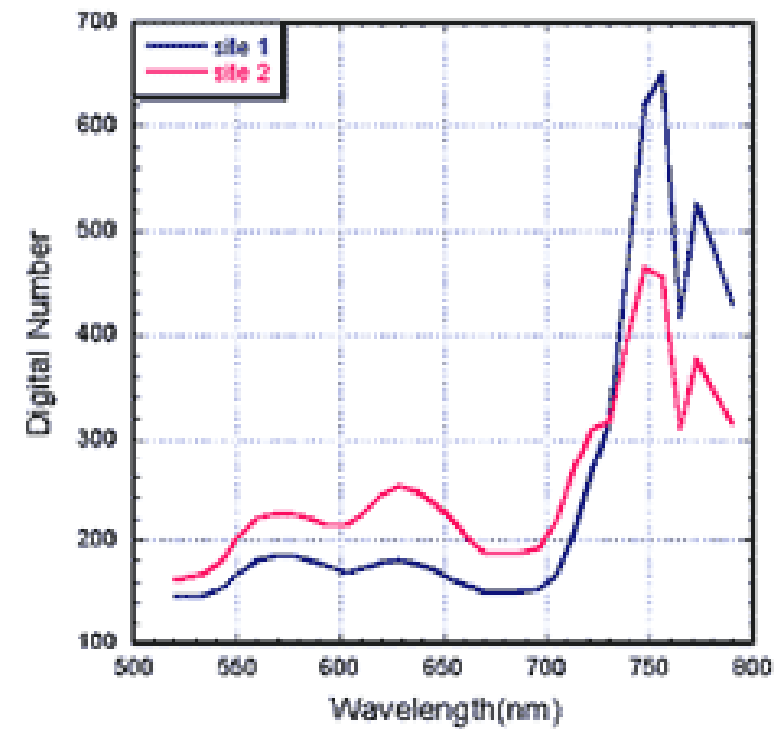
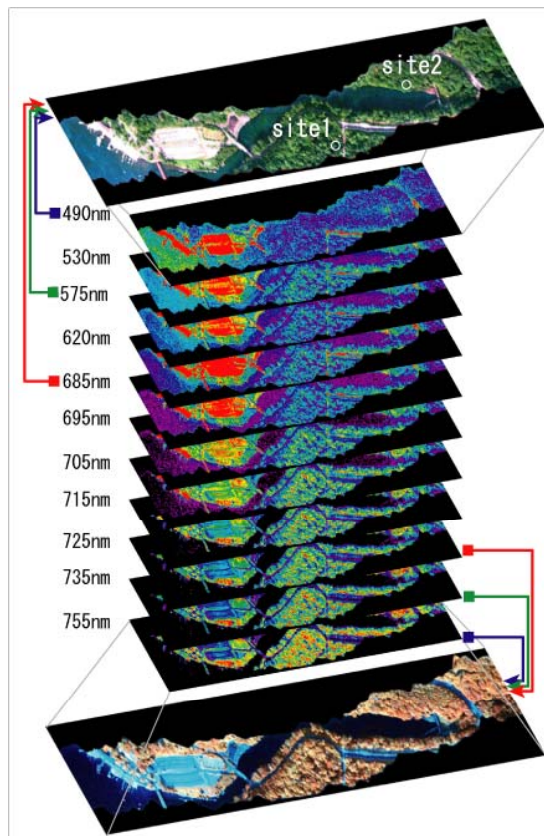
# ハイパースペクトル画像は植物を区別できる



植物のスペクトル反射率曲線

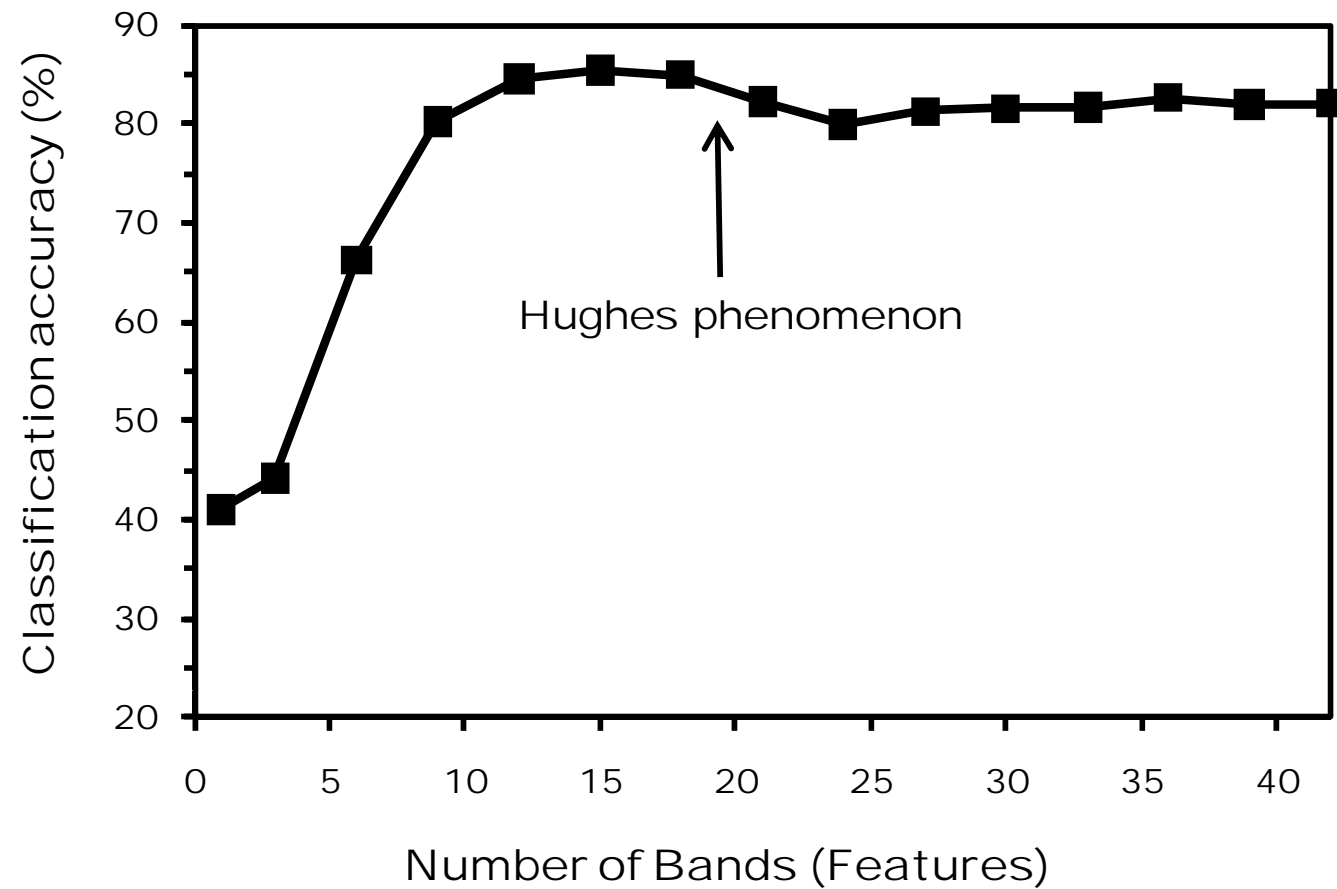
2006年7-8月、内モンゴルの草原と砂漠での現地測量

# 航空機ハイパースペクトル画像



(Source: CGER, NIES)

# 「ヒューズの現象」 (Hughes phenomenon) (「次元の呪い (curse of dimensionality)」)



次元数を減らして分類する手法が提案されている

1. Principal components analysis (PCA) with conventional classification methods
2. Spectral angle mapper and spectral information divergence methods  
mathematical morphology-based classification methods
3. Feature selection and feature extraction methods
4. Cluster and hierarchical classification methods



## これらの手法の特徴

- 1) 画像の次元を削減、適当な低次元を構成する
- 2) 他の分類方法で画像进行分类する

## 欠点

新たな低次元を構成するために大幅に計算時間を要する。また分類手法によって結果が良くない場合がある。

## 部分空間法

次元削減と分類を同時に実行する。計算速度が早く、分類精度も高い。

# Case study 1

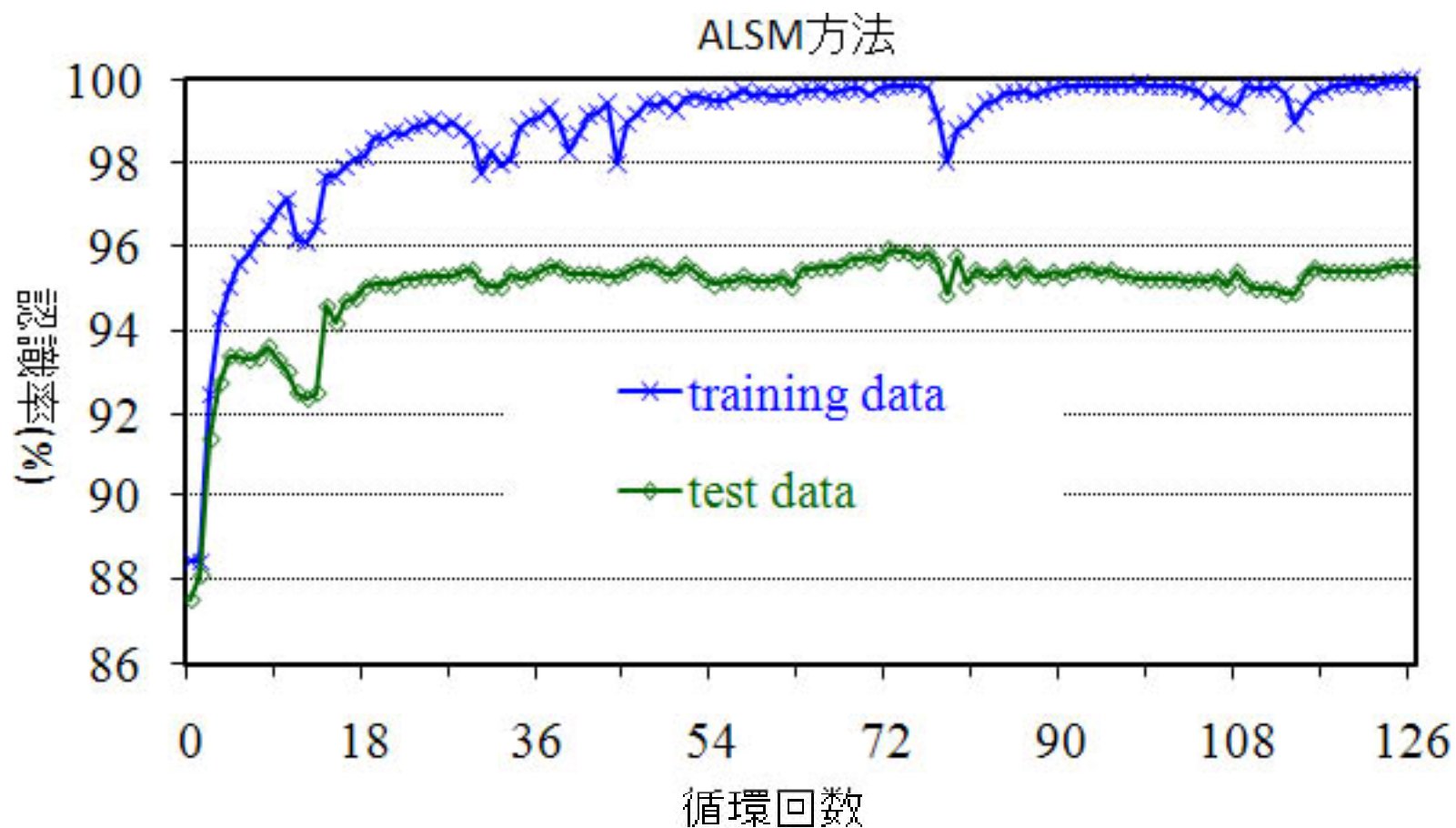
CASI-2ハイパースペクトル画像、荒川総合運動公園，2003年

LAND COVER CLASSES AND NUMBER OF TRAINING AND  
TEST SAMPLES IN THE EXPERIMENTS

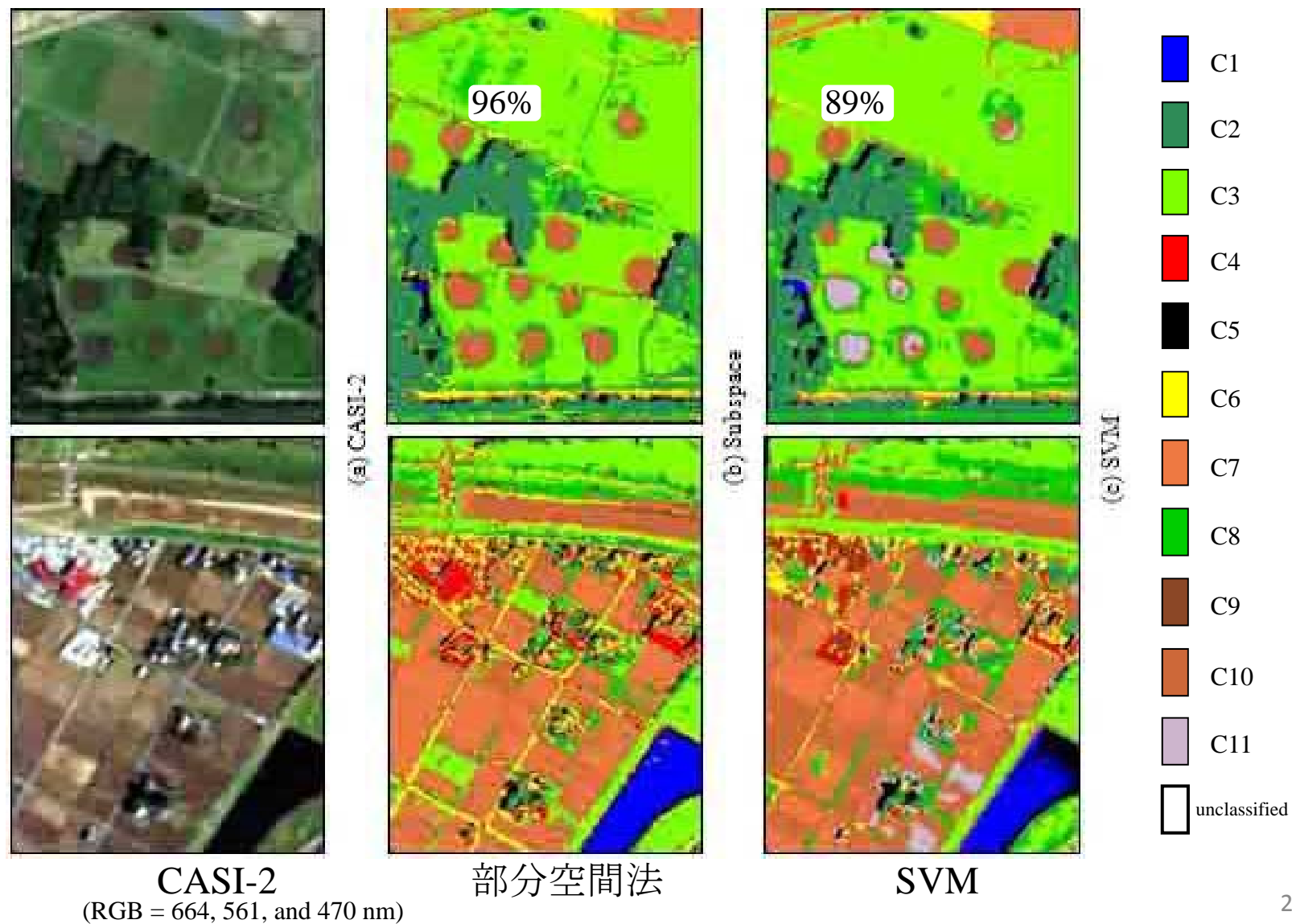
Class	Training samples	Test samples
C1. water	251	206
C2. woodland	300	186
C3. grassland	383	205
C4. roofs	410	206
C5. shadow	269	149
C6. asphalt (roads)	446	266
C7. farmland	306	188
C8. reeds	396	208
C9. parking lot	309	182
C10. bare soil	466	243
C11. concrete	307	142
Total Samples	3843	2181

## ALSM方法で分類

トレーニングデータが完全に識別された。他の分類手法では難しい。



# CASI-2元画像（左）、部分空間分類図（中）とサポートベクターマシン(Support Vector Machine:SVM)分類図（右）の比較



## Case study 2

次元、規格化方法、学習パラメータの影響。224バンド  
AVIRIS “Indian Pine” data sets (Purdue University)を使う。

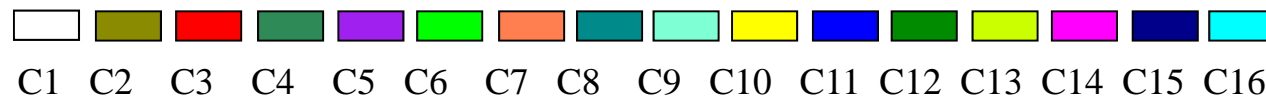


Band 16 (548 nm)



Training and test data

Class	Training samples	Test samples
C1. alfalfa	26	26
C2. corn-notill	671	671
C3. corn-min	400	400
C4. corn	98	99
C5. grass-pasture	228	228
C6. grass-trees	357	357
C7. grass-pasture	13	13
C8. hay-windrowed	241	241
C9. oats	10	10
C10. soybean-notill	480	480
C11. soybean-min	1137	1137
C12. soybean-cleantill	282	283
C13. wheat	104	105
C14. woods	617	618
C15. bidg-grass	180	181
C16. stone-steel	44	45
Total	4888	4894



# データの規格化と部分空間の次元

規格化：ピクセル  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T$  を正規化して長さを1にすること。

[0, 1] 規格化

$$s' = (s_1 / d, s_2 / d, \dots, s_i / d)^T$$

ここで、 $d = \text{sqrt}(s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2)$

[-1, 1] 規格化

$$s'_i = (s_i - m) \left( \sum_{i=1}^n (s_i - m)^2 \right)^{-0.5}$$

ここで、 $m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i$

## 部分空間の次元

固定次元：全ての部分空間が同じ次元を取ること

ダイナミック次元：部分空間が互いに違う次元を取ること

私たちの実験で、固定次元の方がリモートセンシング土地分類で精度が高いので、固定次元だけを使う。

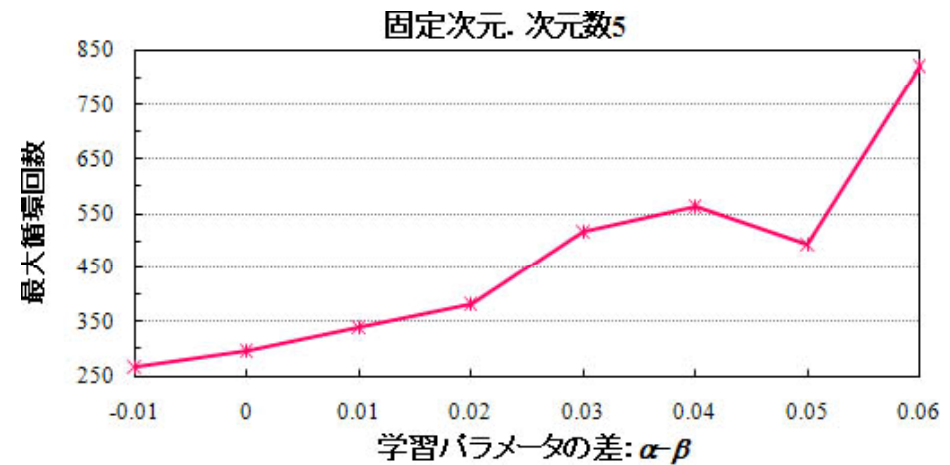
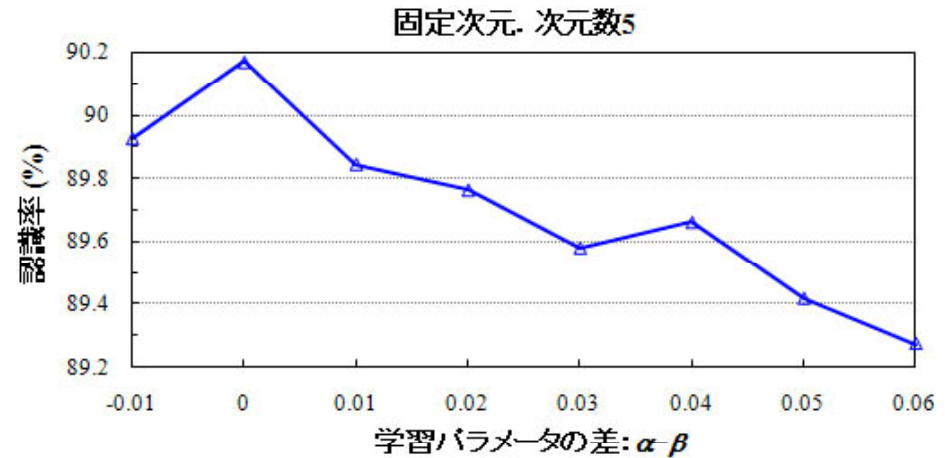
# 学習パラメータの差の影響

学習パラメータの差： $\alpha-\beta$

$$P_k^{(i,j)} = \sum_{s_{i,l}} \left\{ s_{i,l} s_{i,l}^T \middle| s_{i,l} \in \omega^{(i)}, s_{i,l} \mapsto \omega^{(j)} \right\}$$
$$P_k^{(i)} = P_{k-1}^{(i)} + \alpha \sum_{j \neq i} P_k^{(i,j)} - \beta \sum_{j \neq i} P_k^{(j,i)}$$

学習パラメータの差が小さくなるほど分類精度が高くなる。

学習パラメータの差が小さくなるほど全てのトレーニングデータを識別するための最大循環回数は少なくなる。

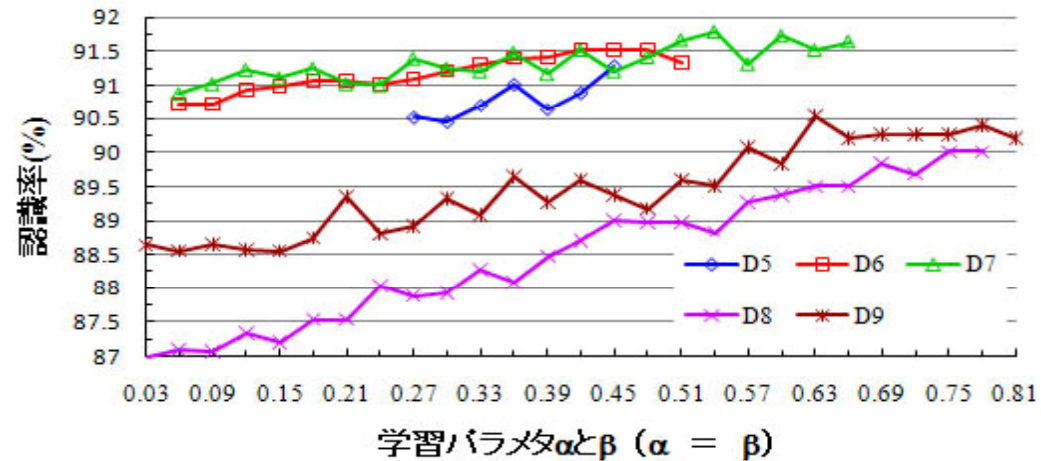




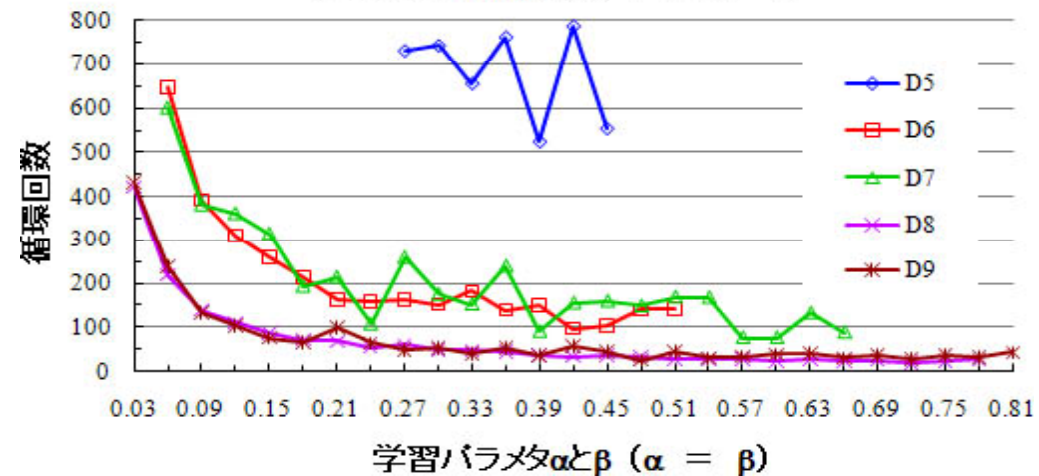
## 部分空間の次元の影響

- 学習パラメータを0.03の歩合で増加。
- 固定次元が5, 6, 7の時、精度が高い。
- 次元数が大きくなるほど、収束領域は広くなる。例えば、  
D5: [0.27, 0.45]  
D9: [0.03, 0.81]
- 次元数が大きくなるほど、最大循環回数は少くなる。

固定次元、100%のトレーニングデータ



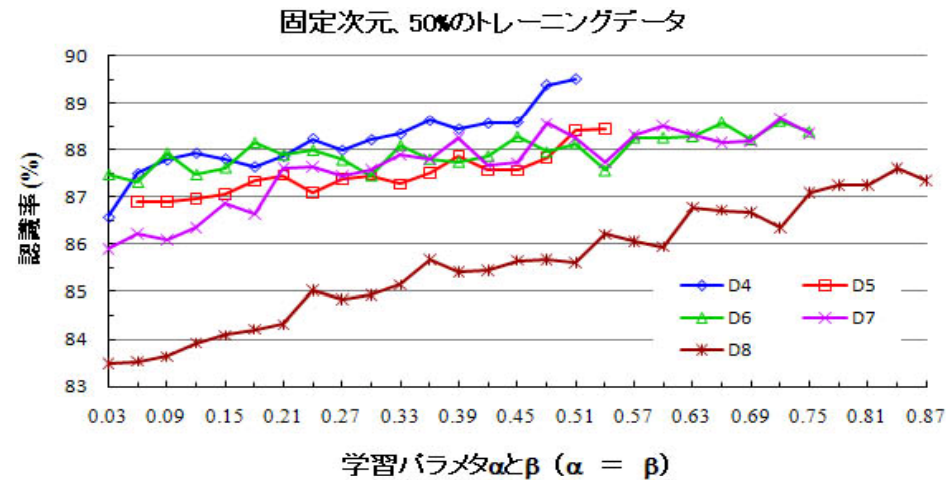
固定次元、100%のトレーニングデータ



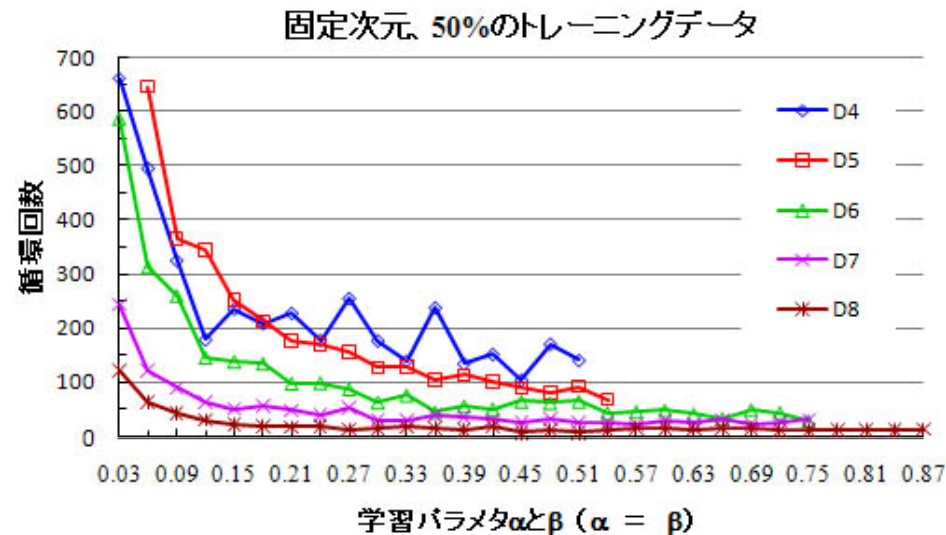


# トレーニングデータ数の影響

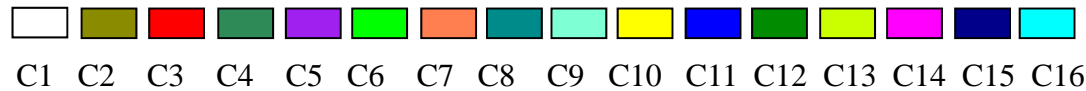
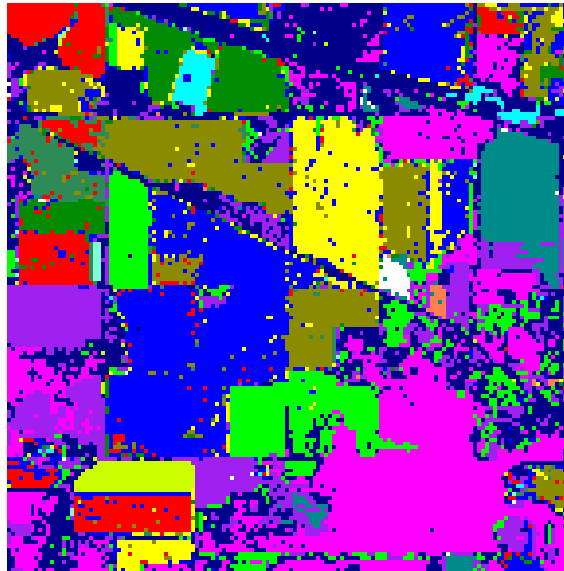
50%のトレーニングデータで学習して、全てのテストデータで検証する。



全データ使用時と同じ傾向が見える。  
更に、次元が大きくなるほど、訓練時間が短くなる。



## D6, $\alpha=\beta=0.51$ の時、分類結果図と精度評価



Class	Producer's accuracy (%)	User's accuracy (%)
C1	96.96	88.46
C2	97.74	90.01
C3	90.91	84.5
C4	98.35	82.83
C5	90.91	97.81
C6	88.03	96.92
C7	90.17	76.92
C8	90.85	98.76
C9	99.06	100
C10	96.23	87.29
C11	79.89	91.12
C12	100	91.17
C13	96.96	100
C14	97.74	94.98
C15	90.91	83.43
C16	98.35	88.89

Overall Accuracy: (4470/4894) 91.34%, kappa = 0.9014

Producer's accuracy for land-cover class  $j$ :  $P_{PAj} = \frac{p_{jj}}{p_{+j}}$

User's accuracy for land-cover class  $i$ :  $P_{UAi} = \frac{p_{ii}}{p_{i+}}$

$[p_{ij}]_{n \times n}$  is a confusion matrix,  $p_{ij}$  is the number of pixels in mapped land cover class  $i$  and reference land cover  $j$ ;

$p_{i+} = \sum_{j=1}^n p_{ij}$  is the number of pixels in mapped land cover class  $i$ ;

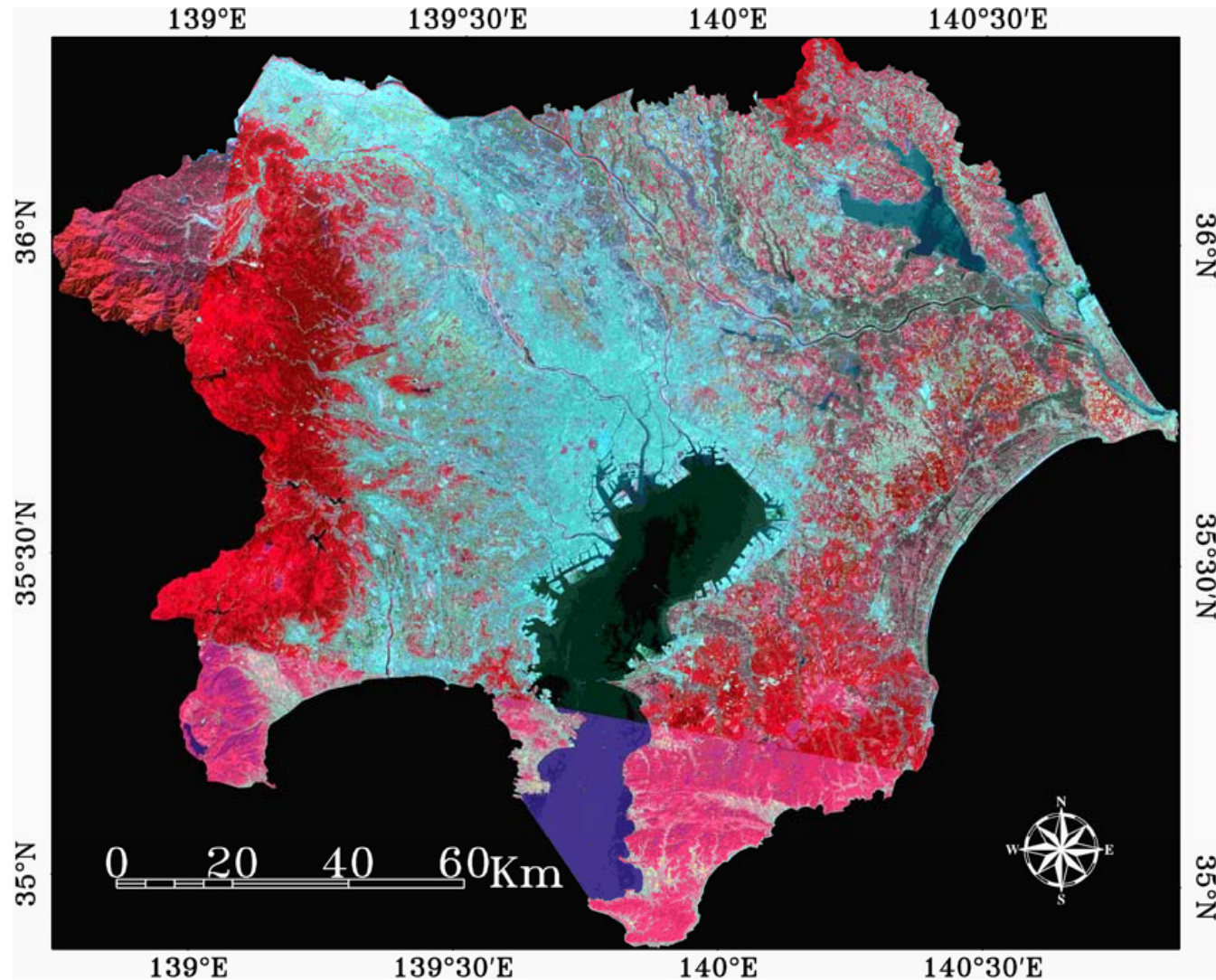
$p_{+j} = \sum_{i=1}^n p_{ij}$  is the true number of pixels in land cover class  $j$ .

# 内容

1. リモートセンシングにおける応用と現状
2. 部分空間法による土地被覆分類の仕組み
3. ハイパースペクトル画像への応用
4. マルチスペクトル衛星画像への応用
5. Polarimetric PALSAR画像への応用
6. 結論と今後の課題

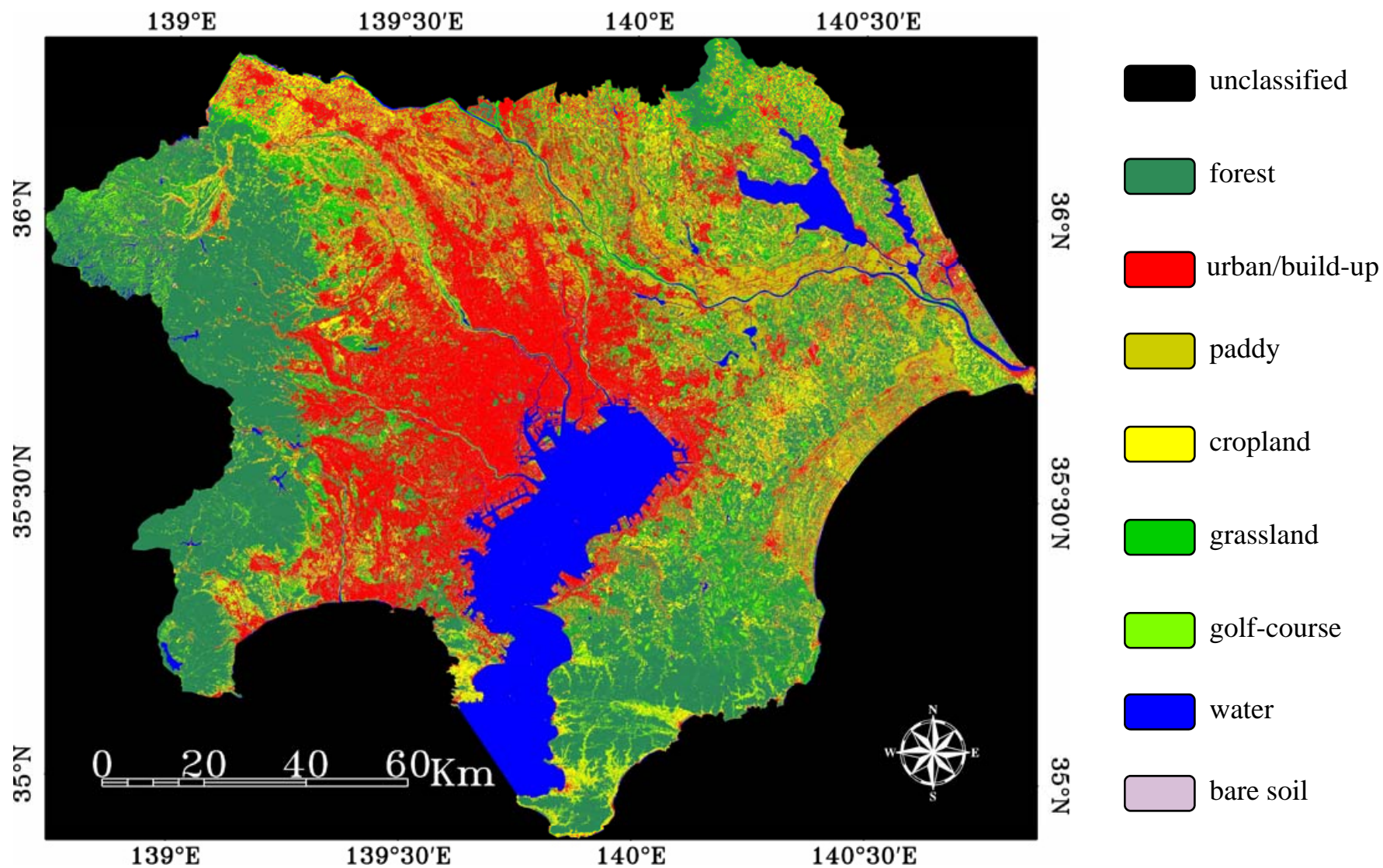
## Case study 1

7バンドのLandsat ETM+ に対する分類実験。 2001-2002年に関東地方で撮影された三つの画像を使用した。



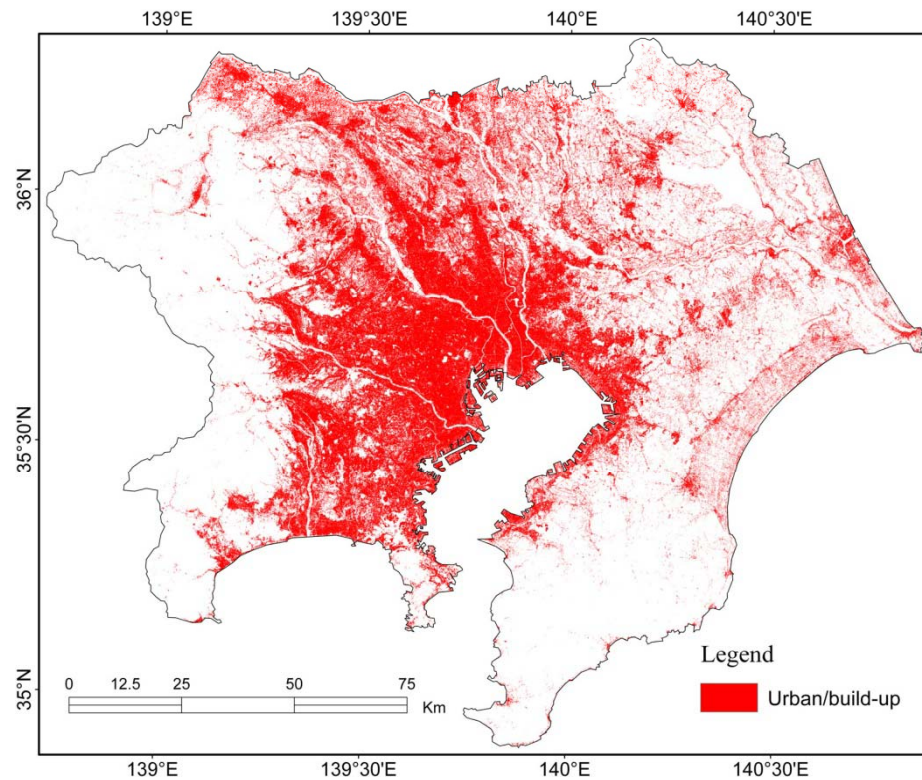


# 部分空間による土地被覆分類図

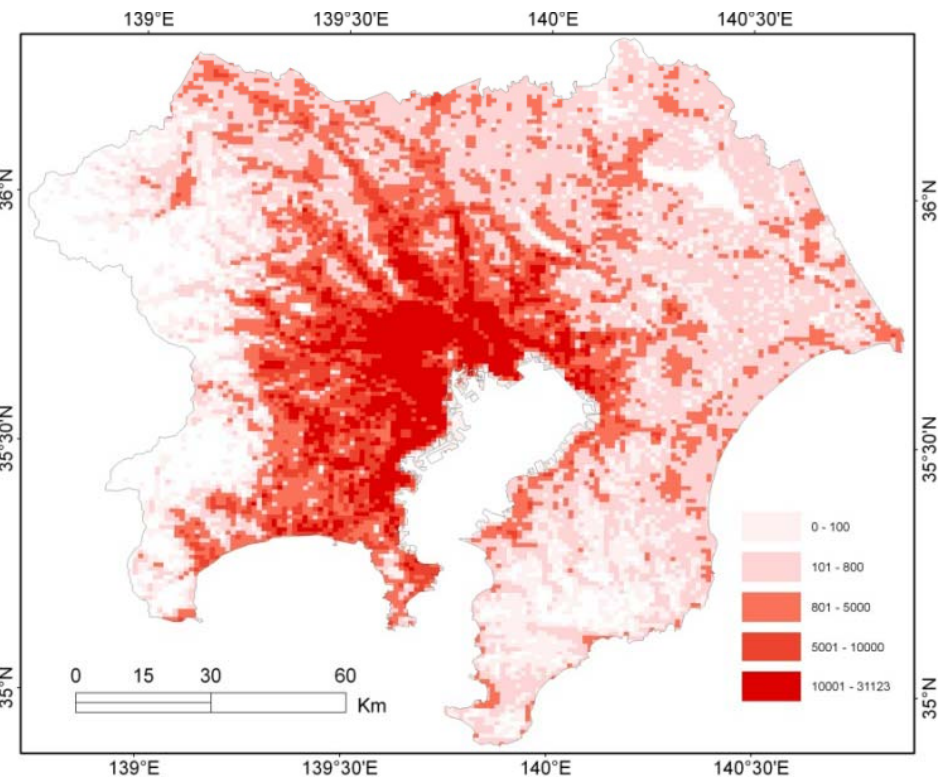


土地被覆分類精度86%

# 衛星による住居地 vs. 人口統計データ



ETM 土地被覆分類図による住居地



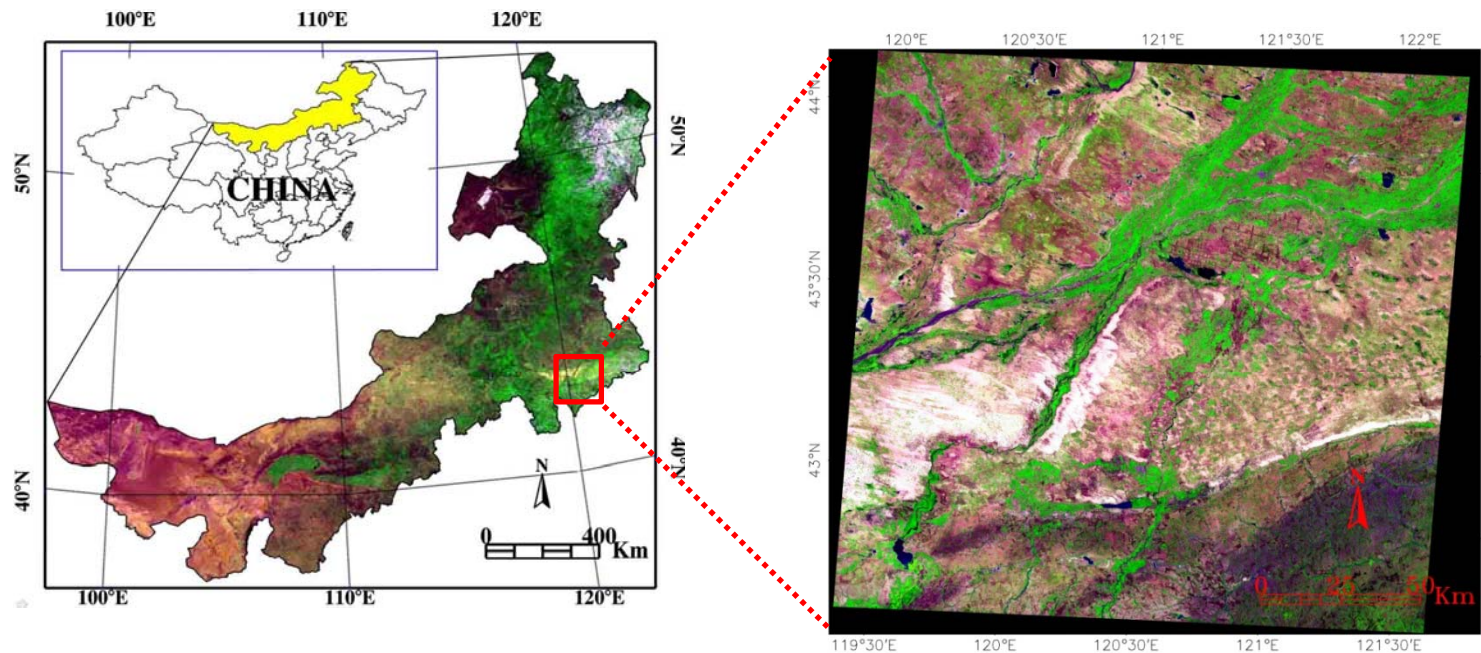
1 Km<sup>2</sup> メッシュ2005年人口統計データ



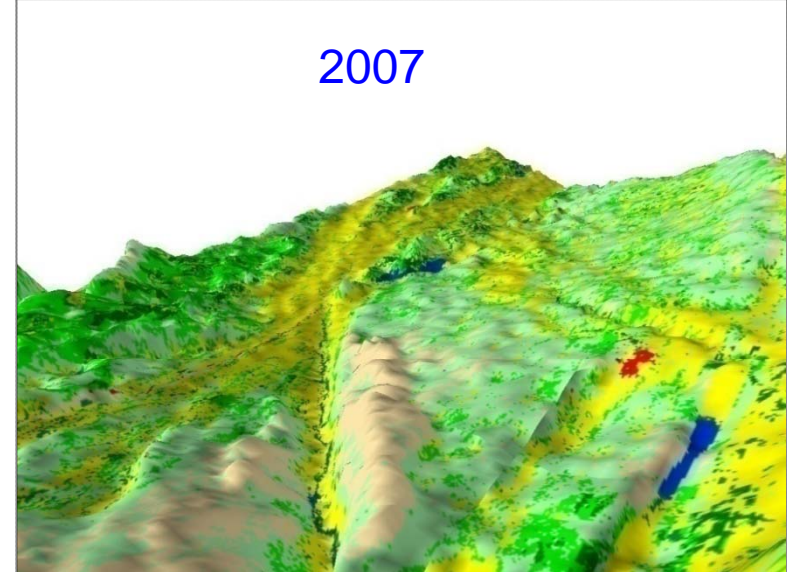
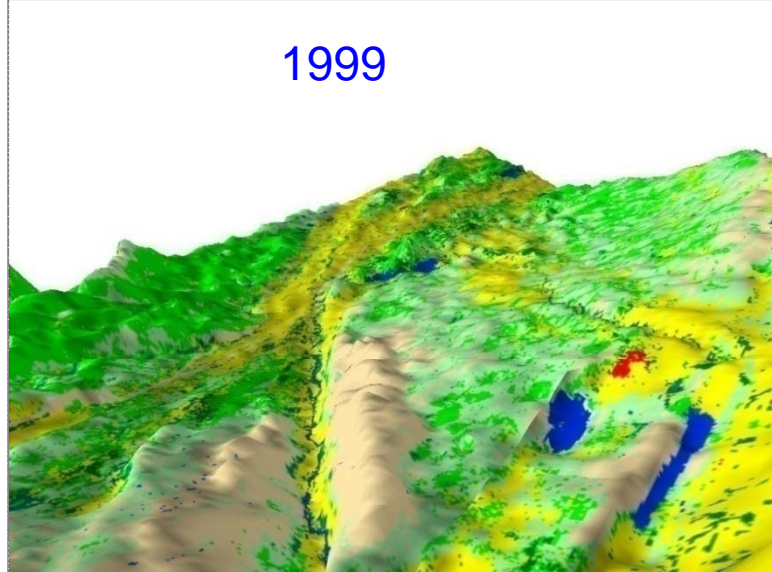
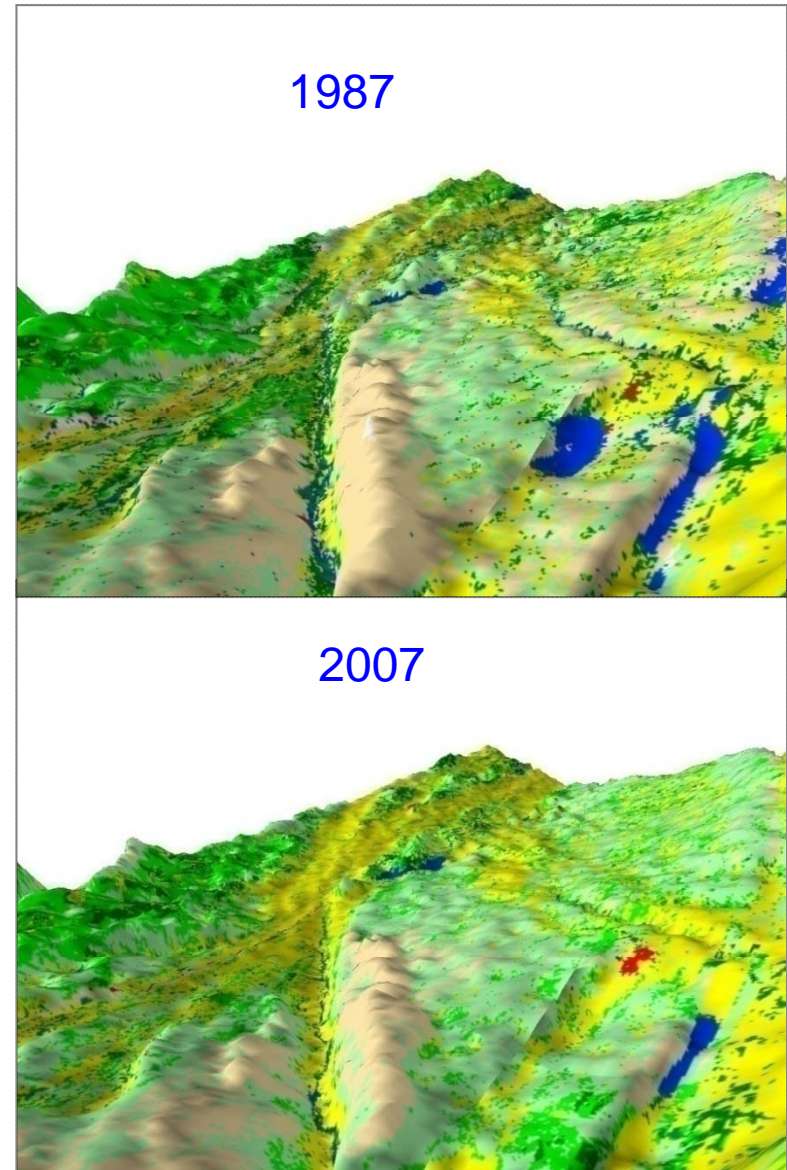
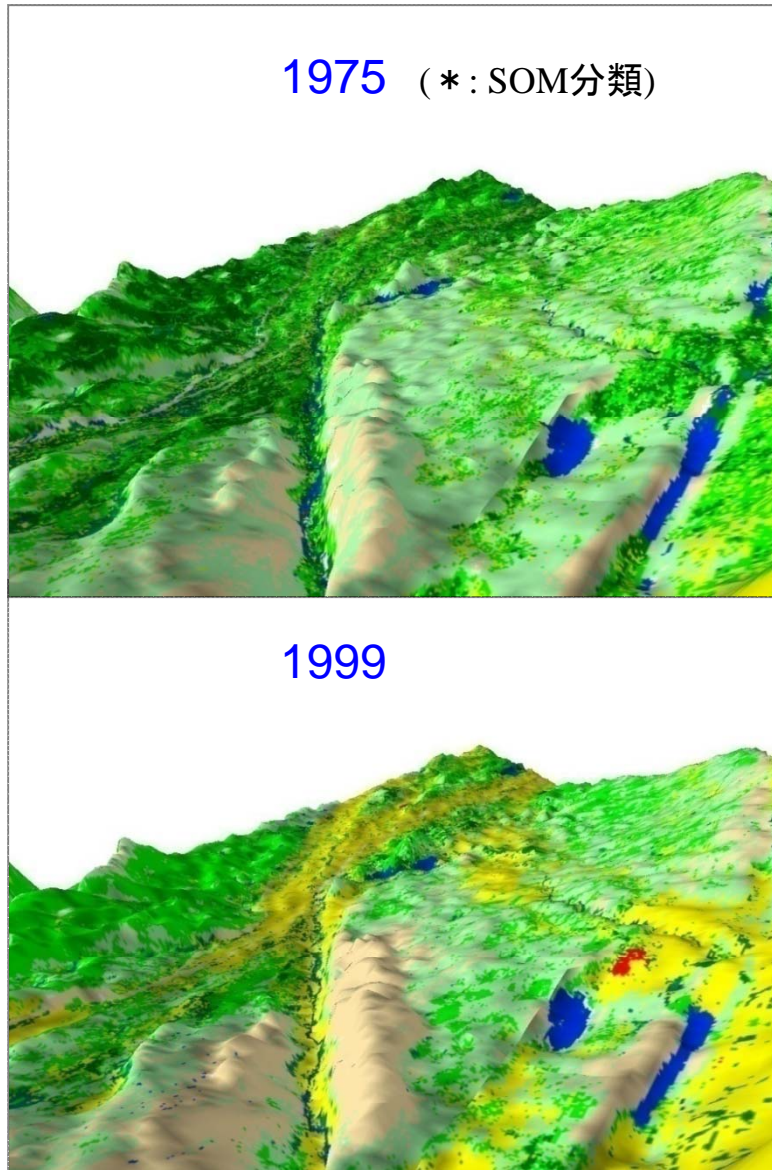
## Case study 2









### 対象地域とデータセット

衛星センサー	取得日	Path / row	Path / row 中心	空間分解能
Landsat-2 MSS	1975-09-06	130/30	43.073N, 121.274E	60 M
Landsat-2 MSS	1976-07-27	131/30	43.108N, 119.701E	60 M
Landsat-5 TM	1987-08-11	121/30	43.166N, 120.819E	30 M
Landsat-7 ETM+	1999-09-05	121/30	43.191N, 120.708E	30 M
Landsat-5 TM	2007-09-03	121/30	43.175N, 120.752E	30 M



人口激增 → 農地增加 → 水面域減少



								
Water	Tree	Crop	Sandy	Sparse	Grass	Urban	Bare	Wetland



時系列土地被覆図の拡大図 (a) 1975, (b) 1987, (c) 1999, and (d) 2007 \*:文献[7]

文献[7], 図4参照

耕地開墾写真: (a) Cropland along a river bank, (b) grassland converted to cropland, (c) and (d) cropland opened in areas of sandy dunes.



(a)



(b)



(c)



(d)

# 部分空間法の改良

ピクセル $x$ の射影を計算する時、式

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n [x^T V_{i,j}]^2$$

の代わりに、MSM 手法を拡張した下の式を使う

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^n \left( \lambda_i^{(j)} / \lambda_i^{(1)} \right)^\rho [x^T V_{i,j}]^2$$

$\rho = 0$  の時CLAFIC法、 $\rho = 1$  の時複合類似度法(MSM) となる

1. 主な計算は内積計算であり、7バンドのTMに対して、訓練・分類の速度が速い
2. 最新の固有値と固有ベクトル計算手法を使えばもっと早く計算できる
3. 分類精度が既存の分類手法と競争できる分類方法である

更に、最適なパラメータを自動で選択する循環計算を導入して、式

$$S_k^{(i)} = S_{k-1}^{(i)} + \alpha \sum_{x_m \in A_j} x_m x_m^T - \beta \sum_{x_n \in B_i} x_n x_n^T$$

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^n \left( \lambda_i^{(j)} / \lambda_i^{(1)} \right)^\rho [x^T V_{i,j}]^2$$

の最適な $\alpha$ 、 $\beta$ と $\rho$ を自動的に選んで、画像を分類すると、分類精度を更に向上できる。改善した部分空間法は、パラメータを手で調整する手間を省き、完全自動化を実現した。

## Case study 3

文献[8], Plate5参照

部分空間法分類  
図で、クラスと  
クラスの境界線  
ははっきりして  
いる。

サポートベク  
ターマシン  
(SVM) と最  
尤法 (MLC)  
分類図と比べる  
と、部分空間法  
はより正しく分  
類結果を得てい  
ることを確認で  
きる。

# 内容

1. リモートセンシングにおける応用と現状
2. 部分空間法による土地被覆分類の仕組み
3. ハイパースペクトル画像への応用
4. マルチスペクトル衛星画像への応用
5. Polarimetric PALSAR画像への応用
6. 結論と今後の課題

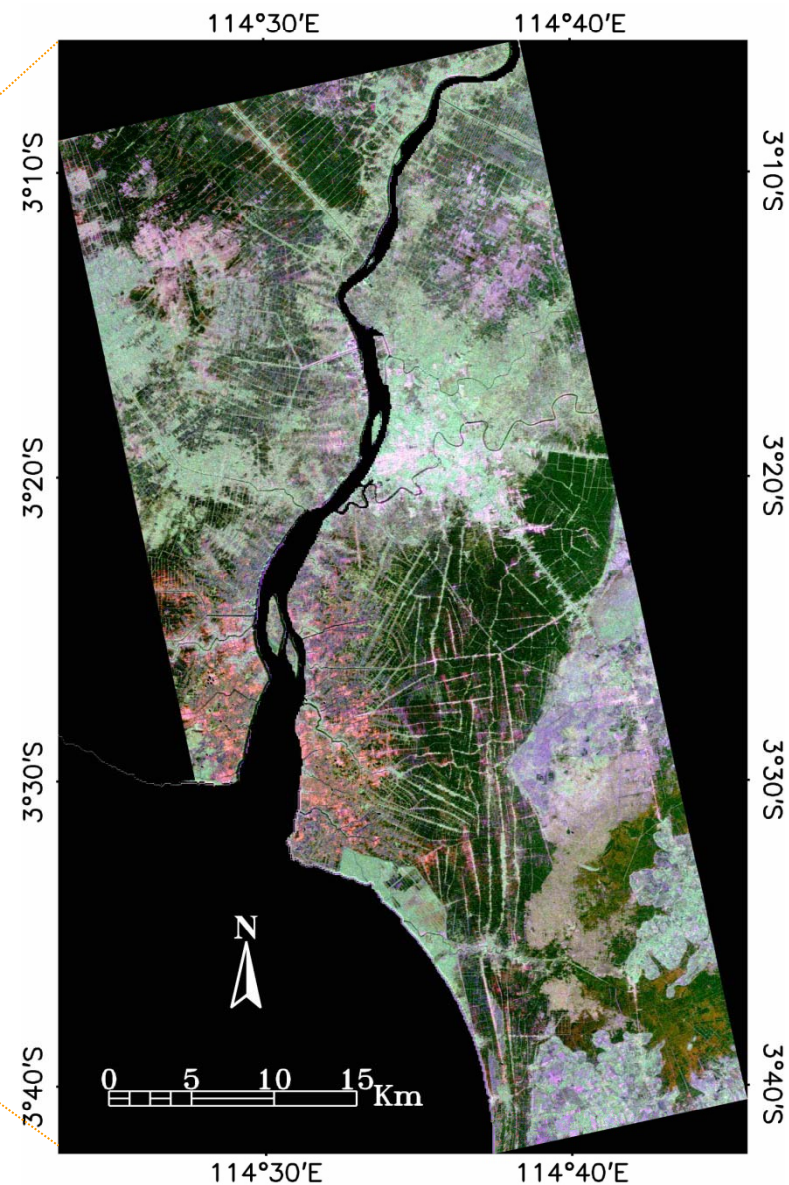


## 2010-03-25 ALOS PALSAR L1.1: HH, HV, VH, VV



Banjarmasin

PALSAR Level 1.1ポラリメトリモードで、偏波の位相・振幅を表すため、複素数で表現している



2010-03-25 (RGB=HH, VH,VV)<sup>39</sup>

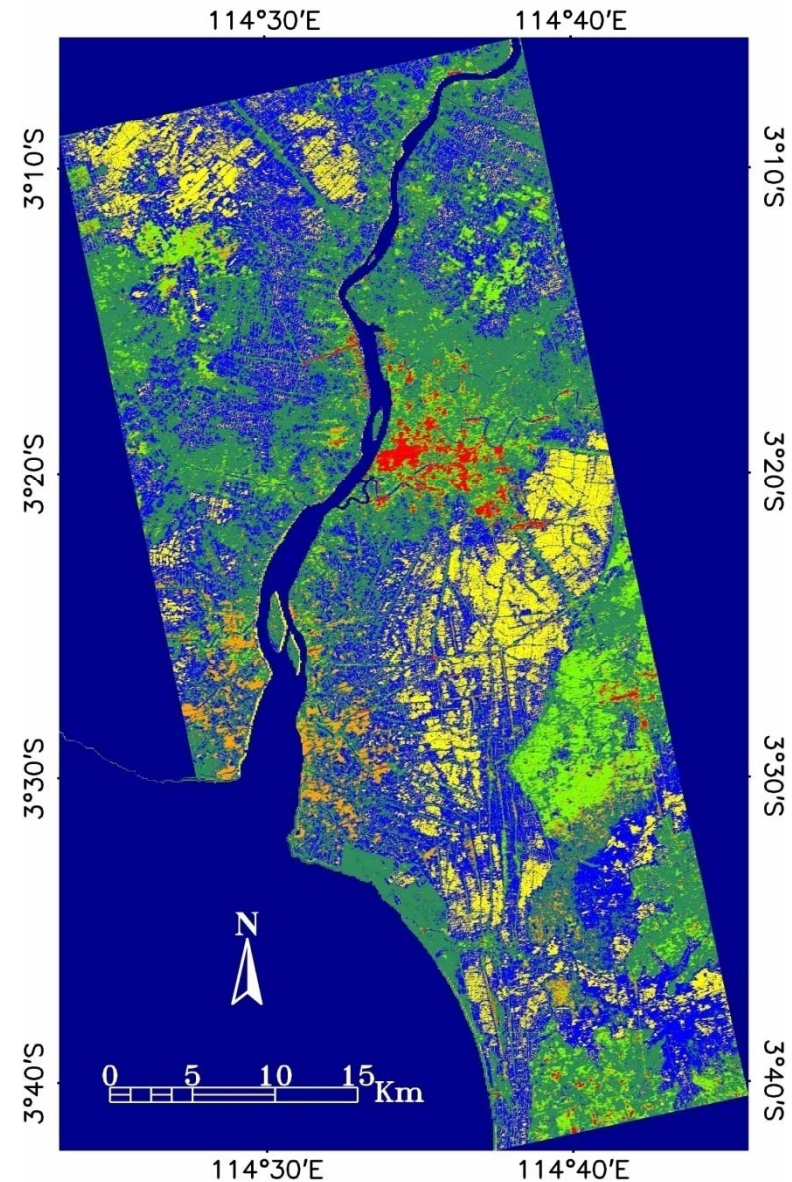
# PALSAR 土地被覆分類図

4偏波(HH+HV+VH+VV) +  
3×3Coherency行列<T3>

<T3> :

偏波の二次統計量を要素  
として、偏波の散乱メカ  
ニズムを表現できる。

振幅の4バンドと<T3>の9  
要素を合わせば、情報量  
が増え、分類精度を改善  
できる。



No-value Forest Water Urban Crop Veget-1 Veget-2



# 内容

1. リモートセンシングにおける応用と現状
2. 部分空間法による土地被覆分類の仕組み
3. ハイパースペクトル画像への応用
4. マルチスペクトル衛星画像への応用
5. Polarimetric PALSAR画像への応用
6. 結論と今後の課題

## 結論

1. 様々なリモートセンシング画像を分類出来る  
ハイパースペクトル画像  
マルチスペクトル衛星画像  
Polarimetric PALSAR衛星画像
2. 分類の仕組みが明瞭で、簡単に実行できる  
固有値と固有ベクトルで部分空間を構成  
計算は行列式の計算と内積計算  
分類は、ピクセルの射影値を求めるだけ

## 今後の課題

1. カーネルを用いた非線形識別手法を導入する  
カーネル主成分分析等
2. パターン認識分野での新発見を導入する  
相互部分空間法等
3. 複素数計算に対応できる部分空間手法を開発する  
ALOS PALSARのポリリメトリモードのデータ  
は偏波の位相・振幅を表すことができる複素数  
タイプを使っている

# 参考文献

1. Erkki Oji. パターン認識と部分空間法(日本語版). 産業図書, 1984.
2. 石井健一郎, 上田修功, 前田英作, 村瀬洋. わかりやすいパターン認識. オーム出版局, 1998.
3. 山形与志樹. 部分空間法によるミクセル分解と超多波長画像への応用. 写真測量とリモートセンシング. vol.35, No.3, pp.34-42, 1996.
4. 新井康平, 陳 華慧. 学習部分空間法に基づくハイパースペクトルデータの カテゴリ分解. 日本写真測量学会誌. vol.45, No.5, 2006.
5. Hasi Hasi Bagan, Yoshifumi Yasuoka, Takahiro Endo, Xiaohui Wang, Zhaosheng Feng, “Classification of Airborne Hyperspectral Data Based on the Average Learning Subspace Method”, *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 5, No. 3, pp.368-372, Jul. 2008.
6. Hasi Bagan, Wataru Takeuchi, Yoshiki Yamagata, Xiaohui Wang, Yoshifumi Yasuoka. “Extended Averaged Learning Subspace Method for Hyperspectral Data Classification”, *Sensors*, vol. 9, No. 6, pp. 4247-4270, Jun. 2009.
7. Hasi Bagan, Wataru Takeuchi, Tsuguki Kinoshita, Yuhai Bao, Yoshiki Yamagata. “Land Cover Classification and Change Analysis in the Horqin Sandy Land From 1975 to 2007”, *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, vol. 3, No. 2, pp.168-177. Jun. 2010.
8. Hasi Bagan, Yoshiki Yamagata, “Improved subspace classification method for multispectral remote sensing image classification”, *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, in press.
9. 福井和広, 部分空間法の今昔 (いまむかし) (下): 最近の技術動向: 相互部分空間法への拡張とその応用事例. 情報処理, vol.49, No.5, pp.680-685, 2008
10. 坂野鋭, 武川直樹, 中村太一, 核非線形相互部分空間法による物体認識. 電子情報通信学会論文誌D. vol.J84-D2, No.8, pp.1549-1556, 2001
11. Scholkopf, B.; Smola, A.; Muller, K.R. “Nonlinear component analysis as a kernel eigenvalue problem”, *Neural Computation*, vol. 10, No. 5, pp. 1299-1319, Jul. 1998.
12. Washizawa, Y.; Yamashita, Y. “Kernel projection classifiers with suppressing features of other classes”, *Neural Computation*, vol.18, No. 8, pp. 1932–1950, Aug. 2006.