社団法人 電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
TECHNICAL REPORT OF IEICE.

[フェロー記念講演] 部分空間法の面白さに魅せられて

福井 和広†

† 筑波大学システム情報系 〒 305–8573 茨城県つくば市天王台 1–1–1
E-mail: †kfukui@cs.tsukuba.ac.jp

あらまし 本稿では，顔画像認識の研究開発を中心に，これまで行ってきた自身の研究歴を振り返りながら，部分空間法との出会い，その面白さ，実用性について述べてみたい．さらに部分空間法から相互部分空間法へ拡張，一般化差分部分空間への射影による特徴抽出，そしてグラスマン多様体上での部分空間表現の導入と，これまでの部分空間法の機能強化の流れを整理する．最後に今後の展望をまとめる．
キーワード 部分空間法，相互部分空間法，高次元ベクトル空間, グラスマン多様体

Fascinated with the fun of the subspace method

Kazuhiro FUKUI†

† Faculty of Engineering, Information and Systems, University of Tsukuba Tennoudai 1–1–1, Tsukuba, Ibaraki, 305–8573 Japan
E-mail: †kfukui@cs.tsukuba.ac.jp

Abstract In this report, I mention the fateful encounter with the subspace method, its fun and practicality, through looking back on my research history with the development of various face recognition systems. Next, I summarize the history on the extensions from the subspace method to the mutual subspace method, and further various enhancements of their classification ability.
Key words Subspace method, mutual subspace method, high-dimensional vector space, Grassmann manifold

1. はじめに

画像認識の研究を始めて４半世紀以上が経った．部分空間法の出会いやその面白さについて述べる前に，部分空間法と出会うまでの私の研究歴を少し振り返ってみたい．部分空間法と出会うまでは，一言で言うと試行錯誤の時期だった．大学院では目に見える流体の挙動について研究していた．それが東芝に入社後は，対象が目に見えない情報分野に放り込まれ，両者の研究スタイルの違いに大いに戸惑った．

1988 年の入社後の暫くは，配属された研究グループが独自開発していた並列画像処理装置 (Vision Processor) によるリアルタイム画像認識システムの研究開発に携わった．試作システムの有効性をアピールするために，不規則運動する風船の重心座標を計測するステレオ視覚システムを開発し，７軸ダイレクトドライブアームと組み合わせて風船ジャグリングロボットを構築したことは楽しい思い出である． その後，1993 年〜1998 年には，不明瞭で微弱エッジや特徴点を高精度かつ安定に抽出するフィルタについて研究した．これらの一連のフィルタには分離度フィルタという名前を付けたが．その理由は大津の２値化に着想を得て，エッジを「輝度が急激に変化する位置」ではなく，「領域と領域を最も分離する領域境界」として定義したことに依る．ちょっとしたアイデアであったが，これが非常に有効に働き，現在でも実装が容易で便利なフィルタとして色々な場面で使われているのは嬉しい．さらに同様のアイデアに基づいて，物体輪郭を「領域と領域を最も分離する領域境界」と定義して，ノイズに頑健な輪郭抽出法を開発した．この輪郭抽出法は超音波心臓診断装置に心臓輪郭抽出機能の一部として使われた．

今，これら一連の研究開発を振り返ると，自分なりには頑張ったとは思うが，直感に基づく職人芸的な側面が多分にあったように感じる．ただ私だけではなく，当時の画像認識の研究全般的にそのような傾向があったように思う．こんな事を言うと，当時の研究者・技術者は数理の重要さを認識していなかったのではと勘違いされそうだが，そうではない．当時は画像処理・認識アルゴリズムを如何に実用速度で動かすという興味や社会ニーズが大きかったのである．加えて，数理の重要さを理解しつつも，今からすると想像も出来ない程の非力な画像入力や計算機パワーに押し流されて，大量データを用いる複雑なアルゴリズムの研究開発には踏み込めなかったのである．工学である限り，有効性をシステム動作を通して示す必要があるが，

それが非常に困難だった．高度で複雑な数学を用いたアルゴリズムでも工夫次第では容易に動作や検証させることが出来る現状を鑑みると，隔世の感がある．今でこそ，数理，統計が土台にあって初めてしっかりとした研究だとする風潮があるが，研究者が取るアプローチはその人の研究センスや数理能力に拘わらず，計算機パワーやデータ環境などの道具立てや研究環境に大きく左右されるということであろうか．もちろん，このような時期にも，深い数理的な理論研究を進めた研究者が数多くいたことは付け加えておく．

2. 部分空間法との出会い

エッジや輪郭抽出などの特徴抽出の研究が一段落した後，顔画像認識の研究に軸足を移していった．その当時，東芝は複合類似度法 [1](注1) を用いた文字認識の研究を精力的に進めており，その水準は世界トップクラスにあった．それに刺激を受けて，部分空間法ベースの顔画像認識の研究を始めた．

部分空間法 [2], [3] は入社早々に知っていたが，その時はシンプルな方法という印象以外あまり残らなかった．顔画像認識に取り組み始めて，初めてその有効性を実感することとなった．言うまでもなく，部分空間法は線形代数や統計学などの数学に支えられた技術体系であり，これを契機に数理や統計の重要さに目覚め，私は研究スタイルを変化させた．

3. 部分空間法

3.1 部分空間法の識別規則

ご存じの方も多いとは思うが，部分空間法の識別規則について簡単に説明しておきたい．部分空間法では，各クラスのパターンの拡がりを部分空間として捉え，入力ベクトル $\boldsymbol{x}$ がどのクラス部分空間に最も近いかに基づいて識別を行う．近さを測る指標 S は，N 次元部分空間を張る基底ベクトルを $\boldsymbol{\psi}_i$ とすると次式で表される．ここで基底ベクトルは学習データに対して主成分分析 (PCA) を適用して求めるが，この際，各データから平均ベクトルを引かない点に注意が必要である．つまり同一クラスに属する学習データから計算される自己相関行列の固有値問題を解き，大きい方から N 個の固有値の対応する固有ベクトルを基底ベクトルとする．

$$S = \sum_{i=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\psi}_i)^2}{\parallel \boldsymbol{x} \parallel \parallel \boldsymbol{\psi}_i \parallel}. \quad (1)$$

上式は入力ベクトル $\boldsymbol{x}$ の部分空間への射影長の自乗を表しているが，同時に入力ベクトルと部分空間の成す角度 θ_1 の余弦の自乗 $cos^2\theta_1$ でもある．このように部分空間法の類似度は２つの解釈が可能であるが，本稿では角度で類似度を測るとする．

3.2 データ分布の部分空間表現

部分空間法の名前の由来は，識別規則から分かるように，データ分布を部分空間で表現することにある．メディア処理分野において部分空間というと，画像セットに対して主成分分析を適用して求まる空間が思い浮かぶかも知れないが，部分空間の定義自体はベクトル空間の ” 部分 ” と素っ気ない．ここで今更と思われるかも知れないが，部分空間の定義を線形代数の教科書から抜き出しておく．

［定義 3.1］（部分空間の定義） $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間Ｖの空でない部分集合Ｗが条件，「$\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$ $\in$ W, c $\in$ $\boldsymbol{K}$ ならば，$\boldsymbol{x}$+$\boldsymbol{y}$, c$\boldsymbol{x}$ $\in$ W」を満たすとき，Ｗ をＶの部分空間という．

さらにベクトル空間の定義も示しておく．

［定義 3.2］（ベクトル空間の定義） 集合Ｖに，加法，スカラー倍とよばれる次の２種類の演算：

加法：Ｖ の２つの要素 の組 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に対して，Ｖの要素 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ を対応させる演算

スカラー倍：$\boldsymbol{K}$ の要素 c とＶの要素 $\boldsymbol{x}$ の組 (c,$\boldsymbol{x}$) に対して，Ｖの要素 c$\boldsymbol{x}$ を対応させる演算.

が定義されていて，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ $\in$ V, c,d $\in$ $\boldsymbol{K}$ に対して，次の (1)〜(8) が成り立つとき，Ｖ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間という．またＶの要素をベクトルと呼ぶ，それに対して，$\boldsymbol{K}$ の要素をスカラーと呼ぶ．

（1） $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ （結合則）
（2） Ｖ の 要 素 0 で，全 て の $\boldsymbol{x}$ $\in$ Ｖ に 対 し て，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ をみたすものがある．
（3） 各 $\boldsymbol{x}$ $\in$ Ｖに対して，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{x}'$ $\in$ Ｖがある．
（4） $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ （交換法則）
（5） (cd)$\boldsymbol{x}$=c(d$\boldsymbol{x}$) （結合法則）
（6） 1$\boldsymbol{x}$=$\boldsymbol{x}$
（7） c$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$=c$\boldsymbol{x}$+c$\boldsymbol{y}$ （分配法則）
（8） (c+d)$\boldsymbol{x}$=c$\boldsymbol{x}$+d$\boldsymbol{x}$ （分配法則）

これを眺めると，部分空間は高次元ベクトル空間において用意された単なる箱に過ぎないことが改めて実感できる．しかし，この数学的には単純で面白みがあまり無いように見える部分空間も，現実の物理現象に照らし合わせて考えると，色々と興味深い研究対象となり得る．

3.3 確定的な部分空間

以前，ある研究者と部分空間ベースの識別法について話をしている時，部分空間には数枚の画像から物理的に決まる確定的な部分空間と，多数のデータから統計的に決まる部分空間があるが，前者の方に興味があるようなニュアンスの事をおっしゃていた．このように画像認識において異なるタイプの部分空間がある事は明確には意識されていない気がする．

確定的な部分空間法の例として，正面顔の照明部分空間はその代表例であろう．３次元物体とカメラの相対位置が固定され，光源の位置のみが変化し，さらに対象物が完全拡散反射面, 凸形状，影を含まないという理想的な状況を考える．顔はこの条件をほぼ満足する３次元物体と見なせる [7]．この場合，図１に示すように，任意照明下の顔の見え方は異なる照明下の３枚の顔画像の線形和で表される．これは任意照明条件における顔の見え方パターン (ベクトル) が，３次元部分空間（照明部分空間

(注1)：複合類似度は飯島先生が提案された方法であり，部分空間法において各基底ベクトルの重みを１にした方法である．本稿ではこれも含めて部分空間法と表記することにする．

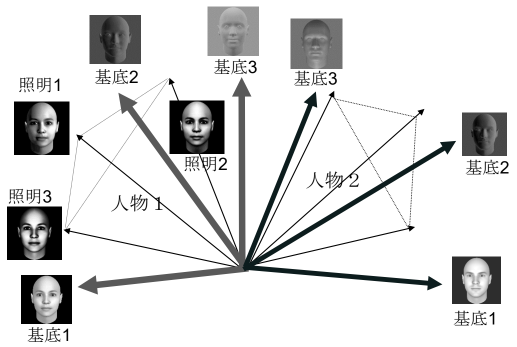


図 1: 照明錐と照明部分空間: 各人物において，点線の三角錐が照明錐，太線ベクトルが照明部分空間を張る基底ベクトルを示している．

と呼ばれる）内に含まれることを意味する．さらに，これらの見え方は，図に示すように部分空間内の照明錐 [8], [9] と呼ばれる凸錐の内部に制限されている．上記条件はかなり厳しいが，これらが完全に成立しなくても顔の見え方は４〜９次元の部分空間内に分布すること [6], [10] が示されている．照明部分空間は与えられた顔画像セットに対してグラムシュミットの直交化を適用することで主成分分析を用いなくても容易に得られる．

このような照明部分空間は大量データから主成分分析 (PCA) により得られる "確率的な" 部分空間に対して，最低３枚という少ない枚数から物理的に決まる "確定的な" 部分空間と言える．ここで照明部分空間は物体表面の法線ベクトル（３次元形状情報）を反映していることを考えると，図１に示すように，異なる人物の２つの照明部分空間の幾何学的な関係を測ることは，顔の３次元形状の類似度を測ることに相当することが分かる．

逆に，カメラと光源の相対位置が固定され, 顔が運動する場合でも, 各画像間で顔特徴点の正確な対応付けができれば, これらに基づいて正規化することで，同様の照明部分空間を生成することができる [11]. 顔向変動が微小の場合には，目鼻などの顔特徴点を基準にした２次元アフィン変換に基づく正規化を施すことで，線形部分空間でもパターン分布を近似することは可能であるが，顔向変動が大きい場合にはそれも難しくなる．また完全拡散反射，凸形状等の仮定が成立しない領域が多くなると，線形部分空間による表現はより困難になる．このような場合には線形部分空間の替わりに非線形部分空間で表現することが有効である [12]. また光源あるいは顔が静止している場合でも，システム構成が大掛かりになるが，マルチカメラやマルチ照明を用いることで多視点画像を能動的に獲得し照明部分空間を生成できる．

確定的な部分空間の例をもう一つ挙げよう．運動する３次元物体を撮影した時系列画像に対して，因子分解法 [13] を適用する際，対象物の３次元形状情報を反映した形状部分空間と呼ばれる部分空間が副産物として得られる [13], [30]. 形状部分空間は特徴点数分の次元を持つ高次元ベクトル空間内の３次元部分空間となり，対象物とカメラの相対位置関係に依らずに同一となる．この点で形状部分空間も "確定的な" 部分空間と呼んだ方が自然であろう．動画像列や距離画像から得られる形状部分

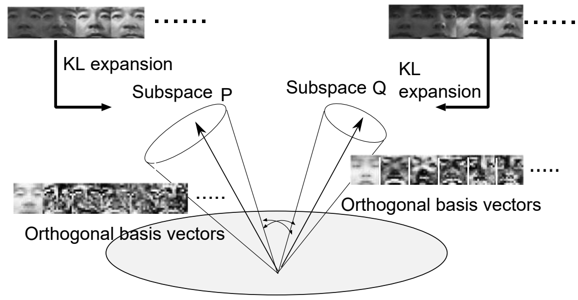


図 2: 相互部分空間の概念図

空間を用いることで，対象物とカメラの相対位置関係に不変な３次元物体認識を実現できる [30], [31].

4. 相互部分空間法

4.1 最小角度に基づく識別規則

部分空間法はパターンの拡がりを部分空間で表すことで，単純類似度法 (r=1 の場合）に対してパターン変動に対する吸収能力を大きく向上させた．この自然な拡張として，入力側もベクトルから部分空間に置き換えて，入力部分空間 $\mathcal{P}$ と辞書部分空間 $\mathcal{Q}$ のなす最小角 θ_1 に基づく識別法が，相互部分空間法 (Mutual Subspace Method(MSM)) [17] である．(図 2). MSM では次式で定義される類似度 S に基づいて識別を行う．

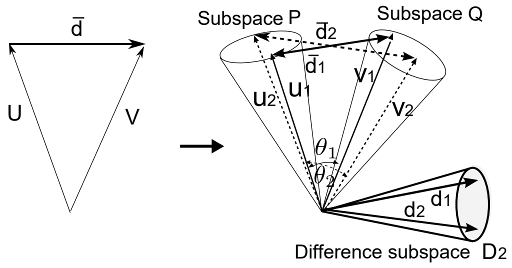
$$S = \max_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathcal{P},\boldsymbol{v}\in\mathcal{Q}\\ \|\boldsymbol{u}\|\neq 0,\|\boldsymbol{v}\|\neq 0}} \frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2}\ . \tag{2}$$

上式は２つの部分空間の成す最小角 θ_1 の余弦の自乗 $\cos^2\theta_1$ を表している．この最小角 θ_1 を求める問題は，２つの部分空間 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ に含まれる任意ベクトル $\boldsymbol{u}\in\mathcal{P}$ と $\boldsymbol{v}\in\mathcal{Q}$ のペアの中で，最大相関係数を持つペアを探索する問題となる．実はこの問題の定式化は多変量解析の正準相関分析 [16] と等価であり，解くべき固有値問題も同一である．ただし相互部分空間法と正準相関分析のデータの扱いには大きな違いがあることには留意されたい．相互部分空間法ではペア探索の対象ベクトルは画像ベクトルそのものである．これに対して正準相関分析からはこのような発想が出て来ることは難しい．両者の基本的な発想の違いにも拘わらず，相互部分空間法を用いて画像認識を行っていながら，正準相関分析を用いている如くの記述が散見されるのは残念である．

N 次元部分空間 $\mathcal{P}$ と M 次元部分空間 $\mathcal{Q}$ の間には $N(\leqq M)$ 個の正準角 [14], [15] が定義できる．相互部分空間法における最小角は N 個の内の最小正準角に対応する．第２正準角以降も部分空間の判別に有効な情報を持っているので，相互部分空間法の識別規則は N 個から任意の複数個の正準角を用いるように一般化できる．以降では，ＭＳＭでは複数正準角を用いた識別規則を考える．

5. 部分空間の差分

２つのベクトルを比較する際，両者の差分ベクトルには有効な情報が含まれることは納得頂けると思う．差分ベクトルの自



(a) (b)

図 3: 差分部分空間の概念図: (a) 差分ベクトル, (b) 差分部分空間.

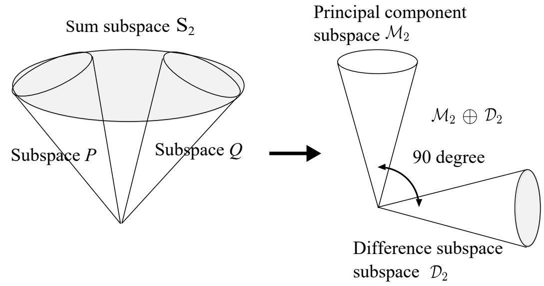


図 4: 差分部分空間の定義：２つの部分空間の和空間 $\mathcal{S}_2$ の主成分部分空間 $\mathcal{M}_2$ と差分部分空間 $\mathcal{D}_2$ への直和分解を示している.

然な拡張として，２つの部分空間に対しても同様の特性を持つ差分部分空間 (Difference subspace (DS)) が定義できる [12]. さらに３つ以上の部分空間に対しても差分成分を含む空間が定義でき，これを一般化差分部分空間 (Generalized difference subspace (GDS)) [12] と呼ぶ. 後で述べるように，これらの差分を表す部分空間は部分空間ベースの識別法において有効な特徴抽出となる.

5.1 差分部分空間の定義

差分部分空間は幾何学的な定義と解析的な定義の両方が可能である. 前者では２つの部分空間の成す各正準角 θ を張る２つの正準ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の差分ベクトル $\bar{\boldsymbol{d}}$ を用いて定義される [12]. 後者では各部分空間への正射影を表す射影行列を用いて解析的に定義されれる. ここでは後者の定義を説明する.

図 4 に示すように，２つの N 次元の部分空間 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ の和空間 $\mathcal{S}_2$ は両者の共通的な成分を含む N 次元の主成分部分空間 $\mathcal{M}_2$ と N 次元の差分部分空間 $\mathcal{D}_2$ に直和分解できる. 後者は全体から共通的な成分を差し引いた成分，つまり差分成分のみを含む部分空間となっている. 部分空間 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ への正射影を表す射影行列をそれぞれ $\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ とすると，両者の差分部分空間 $\mathcal{D}_2$ は以下のように定義される [12].

［定義 5.1］（差部分部分空間の定義） $\mathcal{D}_2$ は，行列 $\mathbf{P}+\mathbf{Q}$ の $N\times 2$ 個の固有ベクトルの内で，1.0 より小さい固有値に対応する N 本の固有ベクトルで張られる.

図 5 は２つの３次元形状（半径の異なる２つの半球）に対応する照明部分空間 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ の差分部分空間の基底ベクトルを示している. この例からも，差分部分空間が２つの部分空間の差異を表した空間であることが見て取れる.

差分部分空間は線形代数に基づいた数学定義なので，色々な応用が期待できると考えられる. 例えば，２つの部分空間を近付ける極限では，差分部分空間は部分空間の ”微分 ”的な操作に対応する. この対応関係とグラスマン多様体を組み合わせることで何か面白い数理体系が作れないか興味あるところである.

5.2 一般化差分部分空間の定義

２つの部分空間に対する差分部分空間を３つ以上の部分空間に対して拡張した概念が，一般化差分部分空間 (Generalized difference subspace(GDS)) である [12]. 図 6 に示すように，一般化差分部分空間 $\mathcal{D}_c$ は，先に述べた差分部分空間の解析的な定義を複数の部分空間セットに対して適用して定義される.

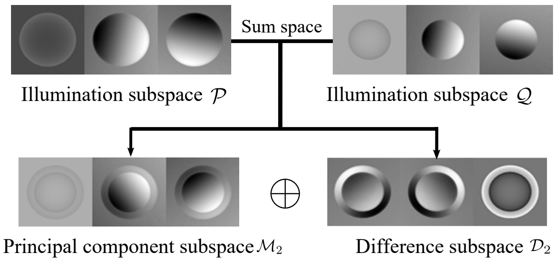


図 5: 差分部分空間の例：照明部分空間 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ の 主成分部分空間 $\mathcal{M}_2$ と差分部分空間 $\mathcal{D}_2$ を示している.

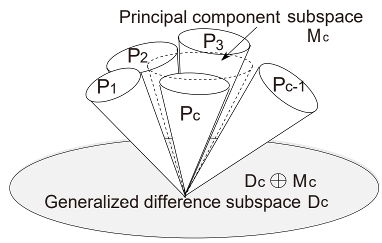


図 6: 一般化差分部分空間 (GDS) の概念図: c 個の部分空間に対する GDS$\mathcal{D}_c$ を示している.

［定義 5.2］（一般化差部分部分空間の定義） $\mathcal{D}_c$ は，行列 $\mathbf{G}=\sum_{k=1}^{C}\mathbf{P}_k$ の小さい方から N_d 個の固有ベクトル，$\boldsymbol{x}_i (i=1,\ldots,N_d)$ により張られる. ここで，$\mathbf{P}_k$ は各クラス部分空間への正射影を表す射影行列である.

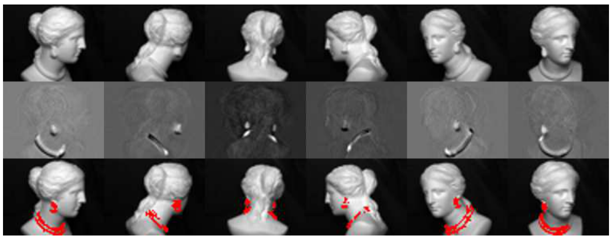
5.3 一般化差分部分空間の非線形化

多視点画像セットを線形部分空間で正確に近似することは難しく，非線形部分空間を用いて表現することになる. このような非線形部分空間に対しても，差分部分空間や一般化差分部分空間を生成できる. 図 7-(a)-(c) に示すような３種類のビーナス３次元像（アクセサリの有無）の多視点画像セットから生成した３つの非線形部分空間を考える. 図 7-(d) は，この３つの非線形部分空間に対する非線形一般化差分部分空間 (Kernel generalized difference subspace (KGDS)) への射影結果を示している. ３種類のビーナス像の微妙な形状差異（イヤリングとネックレス）を的確に捉えていることが分かる.

(a) ビーナス像 1(ネックレスとイヤリング有)

(b) ビーナス像 2(イヤリング有)

(c) ビーナス像 3(無し)



(d) 上段から，入力画像，非線形一般化差部分部分空間への射影，差分成分の強調画像

図 7: 非線形一般化差分部分空間への射影 (KGDS projection)

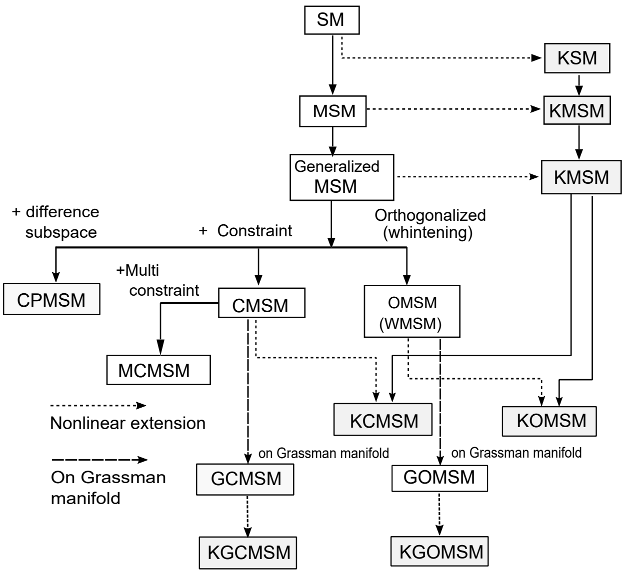


図 8: 部分空間法の機能拡張

6. 部分空間法から相互部分空間法，機能拡張へ

図 8 は部分空間 (SM) から相互部分空間法 (MSM)，さらに相互部分空間法の機能拡張の流れを示している．MSM は最小正準角度を用いた相互部分空間法 [17]， *Generalized* MSM は複数の正準角を用いた相互部分空間法，KSM はカーネル関数を用いた SM の非線形拡張，KMSM は *Generalized* MSM の非線形拡張である．

相互部分空間法の機能強化は，既に説明した各クラス部分空間の差異を表す一般化差分部分空間 (GDS) への射影（GDS 射影と呼ぶ）により実現できる．GDS 射影を前処理として組み込んだ相互部分空間法は制約相互部分空間 (Constrained Mutual Subspace Method(CMSM)) と呼ばれ，顔認識，物体認識などに有効な方法である [12], [20]．また混合類似度法 [4] に着想を得て，相互部分空間法から得られる類似度に差分部分空間の比較により得られる類似度を加味した混合相互部分空間法 (Compound Mutual Subspace Method(CPMSM)) を提案した [26], [27].

GDS 射影による特徴抽出は，クラス部分空間の直交化とほぼ同じ効果を持つ．２つのクラス部分空間が直交関係にあるということは，一方のクラス部分空間に含まれる特徴は，他のカテゴリ空間には含まれないということを意味する．このような直交化をより積極的に実現する方法として，各クラス分布の自己相関行列の総和を用いた白色化が挙げられる．この方法は有効な特徴抽出法として提案され，これを前処理として組み込んだ部分空間法は直交部分空間法 [5] と呼ばれている．この拡張として，全てのクラス部分空間の射影行列の総和を白色化することで，クラス部分空間同士を直交化できる．この直交化を相互部分空間法へ組み込んだ，Whitened Mutual Subspace Method (WMSM) [25] が提案されている．WMSM は顔画像認識において，相互部分空間法の識別性能を更に向上させることが示されている [25].

多視点画像セットなどの非線形分布に対応するために，部分空間法と相互部分空間法は，それぞれ非線形部分空間法 (KSM) [21], [22] と核非線形相互部分空間法 (KMSM) [19] に拡張された．CMSM と OMSM についても同様に KCMSM [12] と KOMSM [24] に非線形化されている．

先に述べたように物体の見え方は，厳密には照明部分空間に含まれる錐照明空間の内部に限定される．これに着目してデータ分布を凸錐で表現した錐制約部分空間法 (Cone-restricted subspace method) [28], [29] が提案されている．部分空間表現に比べて，錐制約を付加することで識別性能が向上することが示されている．

さらに複数の部分空間の集合はグラスマン多様体上の点群として扱うことが可能である．GDS 射影とグラスマン判別分析との組み合わせ [32] や部分空間の集合を ” グラスマン多様体上の一つの部分空間 ” で表現する方法 (Grassman MSM/CMSM/OMSM) の研究を進めている [33]．このように部分空間法はグラスマン多様体の概念と結びついて，依然として面白い進展を続けているのである．

7. 相互部分空間法ベースの顔画像認識

最後に相互部分空間法 (MSM) に基づく一連の顔画像認識の開発を少し振り返ってみる．1994 年に顔画像認識の研究に着手し，1999 年に，MSM を用いた顔によるセキュリティソフト (SmartFace) を開発し，東芝製超小型ノート PC（Libretto）に搭載した．さらに MSM の識別性能を向上させた制約相互部分空間法 (CMSM) を開発し，2001 年に CMSM は入室管理システム (東芝 FacePass1) にその照合エンジンとして組み込まれた．近年は，動画像列から得られる顔面微小特徴点 (シミ，ホクロ) の動き情報から形状部分空間を求め，これを用いて視点や頭部の動きに対して不変な個人識別システム [30], [31] の研究を進めている．

8. 今後の展望

本稿ではこれまでの研究を振り返りながら，部分空間法との出会い，その面白さや実用性について述べた．部分空間表現とその幾何に基づく部分空間法の汎用性と実用性は理解してもらえたと期待する．しかしながら，逆にこのシンプルさが故に，ほぼ研究し尽くされた方法と感じられる方も多いのではないだろうか．私はそうは思わない．部分空間は数理問題の様々な階層に現れる概念であり，どのような情報源に対して推定するかでその特性が違ってくる．本稿で述べたように物理現象から必然的に確定される部分空間もあれば，統計的に推定される部分空間もある．また部分空間内にデータが均一に存在するとは考えられず，精密な議論のためには凸錐制約が必要となる．

最近注目を集めている深層学習との関係も気になるところである．深層学習の有効性の源の一つに，非線形主成分分析に相当する処理モジュールが有効に働いている点にあるように思える．そう考えると，深層学習は非線形主成分分析の繰り返しという見方が出来，これまでの部分空間法の研究において得られている様々な知見やノウハウが，深層学習の原理解明および性能強化に貢献できる場面が出てくるかも知れない．

謝辞　本稿で述べた研究の一部は科研費基盤 (B)(16H02842)，挑戦的萌芽研究 (16K12453) の助成を受けたものである．

文　献

[1] T. Iijima, H. Genchi and K. Mori, "A theory of character recognition by pattern matching method", Proc. 1st international conference on pattern recognition (ICPR), pp. 50–56, 1973.

[2] S. Watanabe and N. Pakvasa, "Subspace method of pattern recognition", Proc. 1st international conference on pattern recognition (ICPR), pp.25–32, 1973.

[3] E. Oja, "Subspace methods of pattern recognition", Research Studies Press,1983.

[4] 飯島泰蔵, "視覚情報の基礎理論―パターン認識問題の源流", コロナ社, 1999.

[5] Josef Kittler, "The subspace approach to pattern recognition", Progress in Cybernetics and Systems Research, pp.92, 1978.

[6] Ronen Basri, and David W. Jacobs, "Lambertian Reflectance and Linear Subspaces", IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.25, issue 2, pp.218–233, 2003.

[7] Amnon Shashua, "On Photometric Issues in 3D Visual Recognition From A Single 2D Image", International Journal of Computer Vision, vol. 21, pp.99–122, 1997.

[8] Peter N. Belhumeur, and David J. Kriegman, "What is the set of images of an object under all possible lighting conditions?", International Journal of Computer Vision, vol. 28, issue 3, pp.1–16, 1998.

[9] Athinodoros S. Georghiades, Peter N. Belhumeur, and David J. Kriegman, "From Few to Many: Illumination Cone Models for Face Recognition under Variable Lighting and Pose", IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 23, issue 6, pp.643–660, 2001.

[10] Kuang-chih Lee, Jeffrey Ho, and David J. Kriegman, "Acquiring linear subspaces for face recognition under variable lighting", IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 27, issue 5, pp.684–698, 2005.

[11] Akiko Nakashima, Atsuto Maki, and Kazuhiro Fukui, "Constructing Illumination Image Basis from Object Motion", ECCV 2002, pp.195–209, 2002.

[12] Kazuhiro Fukui and Atsuto Maki, "Difference subspace and its generalization for subspace-based methods", IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.37, issue 10, pp.2164–2177, 2015.

[13] Carlo Tomasi and Takeo Kanade, "Shape and motion from image streams under orthography: a factorization method", International Journal of Computer Vision, vol.9, issue 2, pp.137–154, 1992.

[14] H. Hotelling, Relation between two sets of variables, Biometrica, vol. 28, pp.322–377, 1936.

[15] G. H. Golub and C. F. Van Loan, "Matrix Computations 3rd ed.",Johns Hopkins University Press, 1996.

[16] 柳井 晴春, "多変量データ解析法 –理論と応用", 行動計量学シリーズ 8, 朝倉書店, 1994.

[17] 前田 賢一, 渡辺 貞一, "局所的構造を導入したパターン・マッチング法", 信学会論 (D), vol.J68-D, no.3, pp.345-352, 1985.

[18] 山口 修, 福井 和広, "顔向きや表情の変化にロバストな顔認識システム" Smartface", 信学論 (D-II), vol.J84-D-II,no.6, pp.1045-1052, 2001.

[19] 坂野 鋭, 武川 直樹, 中村 太一, "核非線形相互部分空間法による物体認識", 信学論 (D-II), vol.J84-D-II, no.8, pp.1549-1556, 2001.

[20] 福井 和広, 山口 修, "部分空間法の理論拡張と物体認識への応用 ", 情報処理学会論文誌 コンピュータビジョンとイメージメディア，vol.46, No.SIG 15 (CVIM 12), pp21–34, 2005.

[21] 前田 英作, 村瀬 洋, "カーネル非線形部分空間法によるパターン認識", 信学論　(D-II), vol. J82-D-II, no.4, pp.600–612, 1999.

[22] 津田 宏治, "ヒルベルト空間における部分空間法", 電子信学論 (D-II), vol.J82-D-II, no.4, pp.592–599, 1999.

[23] Masashi Nishiyama, Osamu Yamaguchi, and Kazuhiro Fukui, "Face Recognition with the Multiple Constrained Mutual Subspace Method", AVBPA2005, pp.71–80, 2005.

[24] Kazuhiro Fukui and Osamu Yamaguchi, "The Kernel Orthogonal Mutual Subspace Method and Its Application to 3D Object Recognition", ACCV2007, pp.467–476, 2007.

[25] Tomokazu Kawahara, Masashi Nishiyama, Tatsuo Kozakaya, and Oamu Yamaguchi, "Face Recognition based on Whitening Transformation of Distribution of Subspaces", ACCV Workshop Subspace2007, pp.97–103, 2007.

[26] Naoki Akihiro and Kazuhiro Fukui, "Compound Mutual Subspace Method for 3D object recognition: A theoretical extension of Mutual Subspace Method", Subspace2010, 2010.

[27] 秋廣 直紀, 福井 和広, "混合相互部分空間法の提案とその顔画像識別への応用", 信学論 D, vol.J94-D no.8 pp.1240–1247, 2011.

[28] 小林 匠, 大津　展之, "パターン識別のための錐制約部分空間法", 信学論 D Vol.J92-D, vol. J92-D, no.1, pp.104–111, 2009.

[29] Takumi Kobayashi, Fumito Yoshikawa, and Nobuyuki Otsu, "Cone-restricted kernel subspace methods", ICIP2010, pp.3853–3856, 2010.

[30] Yosuke Igarashi and Kazuhiro Fukui, "3D Object Recognition Based on Canonical Angles between Shape Subspaces", ACCV 2010, pp.580–591, 2010.

[31] Takao Yoshinuma, Hideitsu Hino, and Kazuhiro Fukui, "Personal Authentication Based on 3D Configuration of Micro-feature Points on Facial Surface", PSIVT 2015, pp.433–446, 2015.

[32] Lincon Sales de Souza, Hideitsu Hino, and Kazuhiro Fukui, "3D Object Recognition with Enhanced Grassmann Discriminant Analysis", ACCV 2016 Workshop on Human Identification for Surveillance, 2016.

[33] Ryoma Yataka and Kazuhiro Fukui, "3D Object Recognition via Subspace Representation on the Grassmann Manifold", ICPRAM2017, 2017.