離散構造 期末試験, 2016 年 12 月 16 日 (金)

解答用紙は 2 枚である．**2 枚ともに**，学籍番号と氏名を記入すること．裏を使用してもよい．問 1 と問 2 の解答を 1 枚の解答用紙に，問 3 と問 4 の解答を別の 1 枚の解答用紙に記入しなさい．(それぞれの解答用紙の中では，問題の順番通りに解答を記述する必要はない．) それぞれの解答の冒頭には，必ず**問題番号を明記**せよ．

問 1．(配点 25 点)

太郎君と花子さんは，クリスマスのデートプランについて相談していた．候補となる行き先は，以下の 4 つである．

P	山下公園に行く．
Q	高級レストランに行く．
R	プレゼントを買いにデパートに行く．
S	みなとみらいで観覧車に乗る．

これらの行き先について，2 人から以下のような希望が出た．

- 希望 1：高級レストランかデパートのうち，少なくとも 1 カ所には行きたい．
- 希望 2：高級レストランとデパートの両方とも行くことはしたくない．
- 希望 3：高級レストランに行かないのなら，山下公園とデパートの両方に行きたい．
- 希望 4：みなとみらいで観覧車に乗るとき，かつそのときに限り，山下公園と高級レストランのどちらにも行かない．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1-a) 上記の 4 つの行き先を，表で示すように原子文 P, Q, R, S で表すものとして，花子と太郎の 4 つの希望を述べた文をそれぞれ命題論理の論理式を使って表現せよ．

(1-b) 2 人で相談しているとき，太郎君は「桜木町駅に近い高級レストランは，どこも安くはないけど料理はおいしいね」と言った．この文を，以下の述語記号と個体定項を使って述語論理の論理式として記号化せよ．

s	桜木町駅
$N(x, y)$	x は y の近くにある．
$F(x)$	x は高級レストランである．
$C(x)$	x は料金が安い．
$D(x)$	x は料理がおいしい．

(1-c) デートコースが上記の 4 つの希望を全て満たしているとする．この時,「山下公園と高級レストランの両方に行くのならば，デパートには行かない.」ということは成り立つと言えるか．成り立つ場合にはその理由を，成り立たない場合には反例を挙げて答えよ．

(1-d) あいにくクリスマスには，どの高級レストランも定休日で行けないことが分かった．この場合，上記の 4 つの希望を全て満たすようなデートコースはあるか否かを答えよ．また，あるとしたら，高級レストラン以外の 3 つの候補地のうち，どこに行けばよいか．理由をつけて答えよ．

(1-e) 相談中に，花子さんが新たな希望として「もしもデパートにも行かないし，みなとみらいで観覧車にも乗らないのなら，山下公園と高級レストランの両方とも行きたいね」と言った．すると太郎君は,「今までの希望に加えて，その希望も満たすなんてことは，論理的に考えて不可能だ」と言った．この太郎君の発言は正しいか否か，理由をつけて答えよ．また，もしも間違っている場合には，花子さんの新たな希望も含めた 5 つの希望のすべてがかなうプランを示せ．

問 2. (配点 25 点)
整数の集合を $\mathcal{Z}$ とし，関数 $f_1, f_2, f_3 : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x^2 \mod 4 \\
f_2(x) &= x^3 \\
f_3(x) &= \mathtt{floor}(x/2)
\end{aligned}
$$

ただし，非負の整数 a に対して $a \mod 6$ は，a を 6 で割った余りを表し，実数 r に対して $\mathtt{floor}(r)$ は，r の小数点以下を切り捨てた整数を表す．たとえば，$13 \mod 6 = 1$ であり，$\mathtt{floor}(7/2) = 3, \mathtt{floor}(-9/2) = -4$ である．

このとき，以下の問に答えなさい．

(2-a) $f_1(x) = x$ となる整数 x をすべて求めなさい．

(2-b) f_2, f_3 のうち，単射でないものをすべてあげた上で，その理由を述べなさい．また，f_2, f_3 のうち，全射でないものをすべてあげた上で，その理由を述べなさい．

なお，f_i は，自然数上の関数ではなく整数上の関数であることに注意せよ．

(2-c) 集合 S を 2 の倍数の集合，集合 T を 3 の倍数の集合とする．また，関数 g および $\mathcal{Z}$ の部分集合 S に対して，$g(S)$ は，関数 g による S の像を表す．

以下の等式について，成立するかしないかを答えた上で，その理由を簡潔に説明しなさい．

$$
\begin{aligned}
f_2(S \cup T) &= f_2(S) \ \cup \ f_2(T) \\
f_3(S \cap T) &= f_3(S) \ \cap \ f_3(T)
\end{aligned}
$$

(2-d) $f_i \circ g$ が恒等関数となる適当な関数 $g : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ および i (ただし，$i \in \{1, 2, 3\}$) を 1 組与えなさい．

(2-e) $h \circ f_3$ が恒等関数となる関数 $h : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ が存在しないことを証明しなさい．

問 3. (配点 25 点)
2×2 行列の集合 $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$
とする．次に V 上の 2 項関係 R,S をそれぞれ以下のように定める．

$$
\begin{aligned}
m \ R \ m' &\Longleftrightarrow m' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot m \\
m \ S \ m' &\Longleftrightarrow m' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot m
\end{aligned}
$$

(3-a) 頂点集合を V，辺集合を $R \cup S$ とする有向グラフ G を図示しなさい．辺の向きと各頂点に対応する V の要素が，図からはっきり読み取れるようにすること．

(3-b) 有向グラフ G の頂点と辺の数をそれぞれ答えよ．

(3-c) 有向グラフ G において，最長の単純道（同じ辺を 2 回以上通らない道）を一つ挙げ，その長さを答えよ．

(3-d) 関係 R が推移的，反対称的であるか否かそれぞれ理由をつけて答えよ．

(3-e) 合成関係 $S \circ S$ が同値関係であるか否か理由をつけて答えよ．

問 4. (配点 25 点) 自然数の集合を $\mathcal{N}$ とし（$0 \in \mathcal{N}$ であることに注意），集合 D を $\{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x \leq 9\}$ と定義する．また，集合 D 上のリストの集合 $List_D$ を以下のように帰納的に定義する．

- Base Case : $\langle \ \rangle \in List_D$.

- Induction Step : $L \in List_D$ かつ $x \in D$ ならば $cons(x, L) \in List_D$.

このとき，以下の問いに答えよ．

(4-a) 集合 $List_D$ の部分集合 $S = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in List_D \mid n \geq 0,\ \forall i \forall j (0 \leq i \leq j \leq n \Rightarrow x_i \leq x_j)\}$ を帰納的に定義せよ．(例えば $\langle 0,1,1,3,5 \rangle, \langle 6,6,6 \rangle \in S$ であるが，$\langle 3,2,4,4,7 \rangle \notin S$ である．なお，上の定義で $n = 0$ のとき，$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ は空リストを表すものとする．)

(4-b) 関数 $calc : List_D \to \mathcal{N}$ を以下のように帰納的に定義する．

$$calc(L) = \begin{cases} 0 & (L = \langle\ \rangle \text{ のとき}) \\ calc(L') + n & (L = cons(n, L') \text{ かつ } n \neq 0 \text{ のとき}) \\ 2 \times calc(L') & (L = cons(n, L') \text{ かつ } n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ただし，上の定義で「×」と「+」はそれぞれ自然数上の乗法と加法の演算子であるとする．このとき，$calc(\langle 2,0,1,3 \rangle)$ を $calc$ の定義に従って計算せよ．ただし，計算の過程も明記すること．

(4-c) ここで，$D^+ = \{x \in \mathcal{N} \mid 1 \leq x \leq 9\}$ とする．また，文字列の集合 E を以下のように帰納的に定義する．

- Base Case : $\Lambda \in E$.
- Induction Step: $e \in E$ かつ $n \in D^+$ ならば，$en \in E$.

また，$List_D$ の要素を E の要素に変換する関数 $str : List_D \to E$ を以下のように帰納的に定義する．

$$str(L) = \begin{cases} \Lambda & (L = \langle\ \rangle \text{ のとき}) \\ str(L')n & (L = cons(n, L') \text{ かつ } n \neq 0 \text{ のとき}) \\ str(L') \cdot str(L') & (L = cons(n, L') \text{ かつ } n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ただし，上の定義で「$\cdot$」は文字列の結合を表すものとする．このとき，$str(\langle 2,0,1,3 \rangle)$ を str の定義に従って計算せよ．ただし，計算の過程も明記すること．

(4-d) 集合 E の要素 e と集合 D^+ の要素 n に対して，e に現れる n の個数を求める関数 $cnt : E \times D^+ \to \mathcal{N}$ を帰納的に定義せよ．(例えば，$cnt(389194, 9) = 2$，$cnt(6, 3) = 0$，$cnt(\Lambda, 1) = 0$ とする．)

(4-e) 集合 E の要素 e に対して，e に現れる 1 から 9 の数字を全て足し合わせて得られる数を求める関数 $sum : E \to \mathcal{N}$ を，以下のように帰納的に定義する．

$$sum(e) = \begin{cases} 0 & (e = \Lambda \text{のとき}) \\ sum(e') + n & (e = e'n \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，「$List_D$ の任意の要素 L について，$calc(L) = sum(str(L))$ が成り立つ」ことを，L に関する帰納法により証明せよ．ただし，証明の中で「任意の $e, e' \in E$ について，$sum(e \cdot e') = sum(e) + sum(e')$」が成り立つことを証明なしに用いてよいものとする．