離散構造 期末試験, 2015 年 12 月 25 日 (金)

解答用紙は 2 枚である．**2 枚ともに**，学籍番号と氏名を記入すること．裏を使用してもよい．問 1 と問 2 の解答を 1 枚の解答用紙に、問 3 と問 4 の解答を別の 1 枚の解答用紙に記入しなさい。(それぞれの解答用紙の中では、問題の順番通りに解答を記述する必要はない．) それぞれの解答の冒頭には，必ず**問題番号を明記**せよ．

問 1．(配点 20 点)

農業試験場で，ある作物（A と呼ぶ）の持つ性質について，以下の 4 つの基本的な特長に注目して調査が行われた．

P	作物 A は収穫量が多い．
Q	作物 A は収穫までの期間が短い．
R	作物 A は害虫に強い．
S	作物 A は冷害に強い．

調査の結果，作物 A に関して以下の 5 つの性質の成り立つことが予想された．

- 予想 1：収穫量が多いという特長と，収穫までの期間が短いという特長の，2 つが同時に満たされることはない．
- 予想 2：収穫量が多いならば，冷害に強くない．
- 予想 3：冷害に強いとき，かつその時に限り，害虫に強くない．
- 予想 4：収穫までの期間が短いならば，害虫に強くないか冷害に強いかの，少なくともいずれか一方が成り立つ．
- 予想 5：収穫までの期間が短いか害虫に強くないかの，少なくともいずれか一方が成り立つならば，収穫量が多い．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1-a) 上記の 4 つの基本的な特長を，表で示すように原子文 P, Q, R, S で表すものとして，予想 1 から 5 の文をそれぞれ命題論理の論理式を使って表現せよ．

(1-b) 予想 1 から 3 が全て正しいとき（ただし，予想 4 と 5 は正しいかどうか分からないとき）,「その作物がもし害虫に強いならば，収穫量が多くないか，あるいは収穫までの期間が短いかの，少なくともいずれか一方の性質を持つ」という命題は常に成り立つと言えるか．成り立つ場合にはその理由を，成り立たない場合には反例を挙げて答えよ．

(1-c) 予想 1 から 4 が全て正しいとき（ただし，予想 5 は正しいかどうか分からないとき），上の表で示した 4 つの基本的な特長のうち，いずれか 3 つを同時に満たすようなことがあるか否か，理由をつけて答えよ．

(1-d) 調査の過程で，新たに以下の性質の成り立つことが予想された．

予想 6：作物 A は，害虫に強いか収穫までの期間が短いならば，冷害に強い．

予想 1 から 5 が全て正しいとき，同時に予想 6 も正しくなるようなことがあり得るか否か，理由をつけて答えよ．

問 2．(配点 30 点)

自然数の集合を $\mathcal{N}$ とし、自然数 n に対して、$\mathcal{N}_n = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < n\}$ とする．（ここで、$n \notin \mathcal{N}_n$ であることに注意せよ．）

以下の問題のうち (2-a),(2-b),(2-c),(2-d) のすべてと、(2-e),(2-f) のいずれか 1 つ (合計 5 題) を解きなさい。(6 題すべてを正答したときはボーナス点を与える。)

(2-a) 有限集合 S に対して，S の要素数を $\#S$ と表す．$\#(S \times S) = \#S$ となることがあるかどうか，また，ある場合は，どのような S に対して，この等式が成立するか答えなさい．

(2-b) $\#(2^S) = \#S$ となることがあるかどうか，また，ある場合は，どのような S に対して，この等式が成立するか答えなさい．

(2-c) $T_n = \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{N}_n \times \mathcal{N}_n \mid x + y < n\}$ とする．たとえば，$\langle 3, 2\rangle \in T_6$ であるが，$\langle 3, 2\rangle \in T_5$ でない．$f(\langle x, y\rangle) = \dfrac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + x$ とする．たとえば，$f(\langle 1, 2\rangle) = 7$ である。この f は T_n から $\mathcal{N}$ への関数となることを示しなさい．

(2-d) 問 (2-c) で定義した f が単射であることを示しなさい．（ヒント: 自然数 x_1, x_2, y_1, y_2 に対して，$x_1 + y_1 < x_2 + y_2$ ならば，$\dfrac{(x_1 + y_1)(x_1 + y_1 + 1)}{2} + x_1 < \dfrac{(x_2 + y_2)(x_2 + y_2 + 1)}{2} + x_2$ であることを，証明なしに使ってよい．）

(2-e; 選択) $p = \dfrac{n(n + 1)}{2}$ とおいたとき、関数 f による T_n の像 $f(T_n)$ が $\mathcal{N}_p$ となることを示したい．一般の n に対して，これを示すのは少々大変であるので，ここでは，$n = 4$ のときのみ示してほしい。すなわち，f による T_4 の像 $f(T_4)$ が $\mathcal{N}_{10}$ であることを示しなさい．

(2-f; 選択) f の定義域を $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ と変更したものを g とすると，g は $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ から $\mathcal{N}$ への単射となる．このことを既知として，$h : (\mathcal{N} \times (\mathcal{N} \times \mathcal{N})) \to \mathcal{N}$ となる関数 h で，単射となるものを 1 つ示しなさい．ただし，h が単射である理由も簡潔に述べなさい．

問 3．(配点 30 点)

集合 $V = \{\langle x_1, x_2, x_3\rangle \mid \{x_1, x_2, x_3\} = \{1, 2, 3\}\}$ とする。たとえば、$\langle 2, 1, 3\rangle \in V$ であるが、$\langle 1, 1, 2\rangle \in V$ でない。次に、V 上の 2 項関係 R,S,T をそれぞれ以下のように定める。

$$\begin{aligned}
R =& S \cup T \\
S =& \{\langle\langle x_1, x_2, x_3\rangle, \langle x_2, x_3, x_1\rangle\rangle \mid \langle x_1, x_2, x_3\rangle \in V\} \\
T =& \{\langle\langle x_1, x_2, x_3\rangle, \langle x_2, x_1, x_3\rangle\rangle \mid \langle x_1, x_2, x_3\rangle \in V\}
\end{aligned}$$

(3-a) 頂点集合を V、辺集合を R とする有向グラフ G を図示しなさい。

(3-b) 有向グラフ G の頂点の数、辺の数、最長の単純道（同じ辺を 2 回以上通らない長さ 1 以上の道）の長さをそれぞれ答えよ。

(3-c) 有向グラフ G において、頂点 $\langle 1, 2, 3\rangle$ を始点とし、頂点 $\langle 3, 1, 2\rangle$ を終点とする単純道で長さが 4 であるものの数を答えよ。

(3-d) 合成関係 $R \circ R$ が反射的、対称的であるかそれぞれ理由をつけて答えよ。

(3-e) 2 項関係 $S \circ S \circ S$ が半順序であるか理由をつけて答えよ。また、2 項関係 $T \circ T$ が同値関係であるか理由をつけて答えよ。

問 4．(配点 20 点)

自然数の集合を $\mathcal{N}$ とする．ここで，葉に自然数のラベルが付いた 2 分木（順序木）の集合 T を，以下のように帰納的に定義する．

- Base Case：任意の自然数 n について，n は T の要素である．
- Induction Step (1)：L と R がそれぞれ T の要素であるならば，$\langle L, R\rangle$ は T の要素である．
- Induction Step (2)：L が T の要素であるならば，$\langle L\rangle$ は T の要素である．

このとき，以下の問いに答えよ．

(4-a) $\langle\langle\langle 0\rangle, \langle 3, 1\rangle\rangle, 2\rangle$ は T の要素であるか否か、理由をつけて答えよ．

(4-b) 与えられた T の要素 t に対して，t の葉に現れる自然数のうちの最大のものを求める関数 $f : T \to \mathcal{N}$ を帰納的に定義せよ．ただし，与えられた 2 つの自然数の最大値を求める関数 $Max : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ を用いてよい．

なお，ここで求めるべき関数 f は，例えば $f(\langle\langle 3, 1\rangle, \langle 2, 4\rangle\rangle) = 4$ となるものである．また，関数 Max は，例えば $Max(3, 0) = 3$，$Max(2, 1) = 2$ などである．ただし，Max は 2 変数関数であるため，$Max(1, 3, 2)$ のような場合は考えないものとする．

(4-c) 集合 A 上のリストの連結を表す関数 $\oplus : List_A \times List_A \to List_A$ と，関数 $g : T \to List_{\mathcal{N}}$ を，それぞれ以下のように帰納的に定義する．

$$L_1 \oplus L_2 = \begin{cases} L_2 & (L_1 = \langle\ \rangle \text{ のとき}) \\ cons(x, (L_1' \oplus L_2)) & (L_1 = cons(x, L_1') \text{ のとき}) \end{cases}$$

（ここで「$\langle\ \rangle$」は,「nil」と同じく空リストを表すものとする.）

$$g(t) = \begin{cases} \langle n\rangle & (t = n \in \mathcal{N} \text{ のとき}) \\ g(L) \oplus g(R) & (t = \langle L, R\rangle \text{ のとき}) \\ g(L) & (t = \langle L\rangle \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，$g(\langle\langle 3, 1\rangle, \langle 2\rangle\rangle)$ を，$\oplus$ および g の定義に従って計算せよ．ただし，計算の過程も明記すること．

(4-d) 上記の T の定義中で，Base Case を以下のように書き換えた場合を考える．

- Base Case：任意の自然数 n について，n が偶数であるならば，n は T の要素である．

また，関数 $h : List_{\mathcal{N}} \to \mathcal{N}$ を以下のように帰納的に定義する．

$$h(L) = \begin{cases} 0 & (L = \langle\ \rangle \text{ のとき}) \\ h(L') + n & (L = cons(n, L') \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，Base Case を書き直して新しく定義された T に関して,「任意の $t \in T$ について $h(g(t))$ が偶数となる」ことを，t に関する帰納法により証明せよ．ただし，証明の中で,「任意の $L_1, L_2 \in List_{\mathcal{N}}$ について，$h(L_1 \oplus L_2) = h(L_1) + h(L_2)$」が成り立つことを証明なしに用いてよいものとする．