離散構造 期末試験 解答つき (注意), 2015 年 12 月 25 日 (金)

問 1. (配点 20 点)

(1-a: 5 点) 上記の 4 つの基本的な特長を，表で示すように原子文 P, Q, R, S で表すものとして，予想 1 から 5 の文をそれぞれ命題論理の論理式を使って表現せよ.

解答: 答えは以下の通りである。

- 予想 1: $\neg(P \wedge Q)$
- 予想 2: $P \Rightarrow \neg S$
- 予想 3: $S \Leftrightarrow \neg R$
- 予想 4: $Q \Rightarrow \neg R \vee S$
- 予想 5: $Q \vee \neg R \Rightarrow P$

ただし、正解は一つだけではなく、上記の論理式と同値になる論理式は全て正解である。例えば、予想 1 については $\neg P \vee \neg Q$ なども正解である。

(1-b: 5 点) 予想 1 から 3 が全て正しいとき（ただし，予想 4 と 5 は正しいかどうか分からないとき），「その作物がもし害虫に強いならば，収穫量が多くないか，あるいは収穫までの期間が短いかの，少なくともいずれか一方の性質を持つ」という命題は常に成り立つと言えるか．成り立つ場合にはその理由を，成り立たない場合には反例を挙げて答えよ.

解答: まず、(1-b) 以下の問題を解くために必要となる真理値表を示す。

P	Q	R	S	予想 1 $\neg(P\wedge Q)$	予想 2 $P\Rightarrow\neg S$	予想 3 $S\Leftrightarrow\neg R$	予想 4 $Q\Rightarrow\neg R\vee S$	予想 5 $Q\vee\neg R\Rightarrow P$	(1-b) の性質 $R\Rightarrow\neg P\vee Q$	予想 6 $R\vee Q\Rightarrow S$
T	T	T	T	F	F	F	T	T	T	T
T	T	T	F	F	T	T	F	T	T	F
T	T	F	T	F	F	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	T	T	T	F
T	F	T	T	T	F	F	T	T	F	T
T	F	T	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T	F	F	T	F
F	T	F	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T	F	T	F	T	F
F	F	T	T	T	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T	T	T	F
F	F	F	T	T	T	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	T	F	T	F	T	T

真理値分析の結果から明らかなように，予想 1〜3 の論理式が全て真となる行は 6、10、11、14、15 行目である。一方、ここで問題となっている性質を論理式で表すと $R \Rightarrow \neg P \vee Q$ となり、これを真理値分析すると、5 行目と 6 行目が偽で、それ以外は全て真となることが分かる。よって、6 行目に対応する状況（すなわち作物 A が「収穫量が多く害虫に強いが、収穫までの期間は短くなく、また冷害にも強くない」場合）では、問題としている性質が成り立たないことが分かる。

(1-c: 5 点) 予想 1 から 4 が全て正しいとき（ただし，予想 5 は正しいかどうか分からないとき），上の表で示した 4 つの基本的な特長のうち，いずれか 3 つを同時に満たすようなことがあるか否か，理由をつけて答えよ．

解答: 予想 1 から 4 が全て成り立つのは、真理値表の 6、11、14、15 行目である。これらの場合のいずれにおいても、P, Q, R, S のうちの高々2 つしか成り立たないことから、3 つの特長が同時に成り立つようなことはない。

(1-d: 5 点) 調査の過程で，新たに以下の性質の成り立つことが予想された．

予想 6：作物 A は，害虫に強いか収穫までの期間が短いならば，冷害に強い．

予想 1 から 5 が全て正しいとき，同時に予想 6 も正しくなるようなことがあり得るか否か，理由をつけて答えよ．

解答: 予想 1 から 5 が全て成り立つのは、真理値表の 6 行目と 14 行目である。一方、予想 6 を論理式で表すと $R \vee Q \Rightarrow S$ となり、これを真理値分析すると、6 行目においても 14 行目においても偽となることがわかる。よって、予想 1 から 6 まで全て成り立つようなことは、論理的にあり得ないことがわかる。

問 2. (配点 30 点)

(2-a: 6 点) 解答: $\#(S \times S) = \#(S) \cdot \#(S)$ であるので、$\#(S) = n$ とおくと、$n^2 = n$ となる。よって $n = 0, 1$ となる。すなわち、有限集合 S が空集合または要素が 1 つだけの集合のとき、およびそのときにかぎり、$\#(S \times S) = \#S$ となる。

(2-b: 6 点) 解答: $\#(2^S) = 2^{\#(S)}$ であるので、$\#(S) = n$ とおくと、$2^n = n$ となる。これは $n \geq 0$ の範囲で解を持たない。よって、$\#(2^S) = \#S$ となる有限集合 S は存在しない。

(2-c: 6 点) 解答: まず、f が、T_n の任意の要素を $\mathcal{N}$ の要素に対応付けていることを示す。$\langle x, y \rangle \in T_n$ とすると、$x, y \in \mathcal{N}_n$ かつ $x + y < n$ である。自然数 x, y に対して $(x + y)(x + y + 1)$ は、偶数と奇数の積、あるいは奇数と偶数の積となり、いずれにせよ、非負の偶数なので、$\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$ は非負の整数、つまり自然数になる。よって、$f(\langle x, y \rangle) \in \mathcal{N}$ である。

次に、f の一意性を示すべきであるが、これは、f の定義から明らかである。

以上から、f は T_n の任意の要素を $\mathcal{N}$ の要素に一意的に対応付けており、関数である。

(2-d: 6 点) 解答: 単射であることを示したいので、任意の $\langle x_1, y_1 \rangle \in T_n$ および $\langle x_2, y_2 \rangle \in T_n$ に対して、$f(\langle x_1, y_1 \rangle) = f(\langle x_2, y_2 \rangle)$ ならば、$\langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle$ を示せばよい。

そこで、まず、任意の $\langle x_1, y_1 \rangle \in T_n$ および $\langle x_2, y_2 \rangle \in T_n$ を取り、$f(\langle x_1, y_1 \rangle) = f(\langle x_2, y_2 \rangle)$ と仮定する。本問の「ヒント」より、もし、$x_1 + y_1 < x_2 + y_2$ であれば、$f(\langle x_1, y_1 \rangle) = f(\langle x_2, y_2 \rangle)$ とはならない。$x_1 + y_1 > x_2 + y_2$ のときも同様である。よって、$x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ である。このとき、

$$f(\langle x_1, y_1 \rangle) = \frac{(x_1 + y_1)(x_1 + y_1 + 1)}{2} + x_1 = \frac{(x_2 + y_2)(x_2 + y_2 + 1)}{2} + x_1 = f(\langle x_2, y_2 \rangle) - x_2 + x_1$$

であるので、$f(\langle x_1, y_1 \rangle) = f(\langle x_2, y_2 \rangle)$ から、$x_1 - x_2 = 0$ となる。すなわち、$x_1 = x_2$ である。また、$x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ から、$y_1 = y_2$ である。

以上から、$\langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle$ となる。(証明終わり)

(2-e: 6 点; 2-f と選択) 解答: $T_4 = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 0 \rangle\}$ であるので、f をこれらに適用した計算をおこなえばよい。

$$f(T_4) = \{f(\langle 0, 0 \rangle), f(\langle 0, 1 \rangle), \cdots f(\langle 3, 0 \rangle)\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = N_{10}$$

となり、$f(T_4) = \mathcal{N}_{10}$ が示せた。

(2-f: 6 点; 2-e と選択) f の定義域を $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ と変更したものを g とすると，g は $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ から $\mathcal{N}$ への単射となる．このことを既知として，$h:(\mathcal{N}\times(\mathcal{N}\times\mathcal{N}))\to\mathcal{N}$ となる関数 h で，単射となるものを 1 つ示しなさい．ただし，h が単射である理由も簡潔に述べなさい．

解答: $h(\langle x,\langle y,z\rangle\rangle)=g(\langle x,g(\langle y,z\rangle)\rangle)$ と置けば、明らかに、h は、$h:(\mathcal{N}\times(\mathcal{N}\times\mathcal{N}))\to\mathcal{N}$ となる関数である。

h が単射であることを調べるため、任意の $x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2\in\mathcal{N}$ を取り、$h(\langle x_1,\langle y_1,z_1\rangle\rangle)=h(\langle x_2,\langle y_2,z_2\rangle\rangle)$ と仮定する。

h の定義より、$g(\langle x_1,g(\langle y_1,z_1\rangle)\rangle)=g(\langle x_2,g(\langle y_2,z_2\rangle)\rangle)$ である。g は単射なので、$\langle x_1,g(\langle y_1,z_1\rangle)\rangle)=\langle x_2,g(\langle y_2,z_2\rangle)\rangle)$ である。よって、$x_1 = x_2$ かつ $g(\langle y_1,z_1\rangle) = g(\langle y_2,z_2\rangle)$ である。再び、g が単射であることを使って、$\langle y_1,z_1\rangle=\langle y_2,z_2\rangle$ となり、$y_1=y_2$ かつ $z_1=z_2$ が言える。

以上から、$\langle x_1,\langle y_1,z_1\rangle\rangle=\langle x_2,\langle y_2,z_2\rangle\rangle$ となったので、h は単射である。

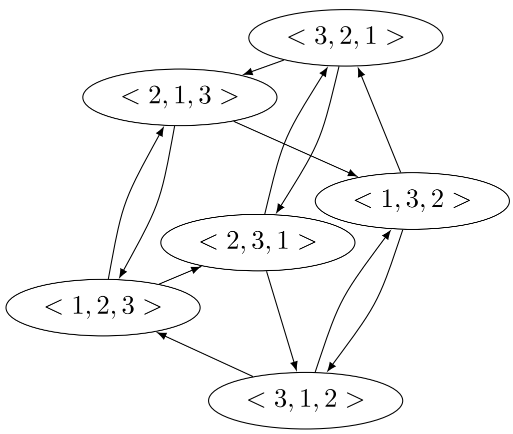
問 3. (配点 30 点)

集合 $V=\{\langle x_1,x_2,x_3\rangle\mid\{x_1,x_2,x_3\}=\{1,2,3\}\}$ とする。たとえば、$\langle 2,1,3\rangle\in V$ であるが、$\langle 1,1,2\rangle\in V$ でない。次に、V 上の 2 項関係 R,S,T をそれぞれ以下のように定める。

$$\begin{aligned}R =& S\cup T\\ S =& \{\langle\langle x_1,x_2,x_3\rangle,\langle x_2,x_3,x_1\rangle\rangle\mid\langle x_1,x_2,x_3\rangle\in V\}\\ T =& \{\langle\langle x_1,x_2,x_3\rangle,\langle x_2,x_1,x_3\rangle\rangle\mid\langle x_1,x_2,x_3\rangle\in V\}\end{aligned}$$

(3-a) 頂点集合を V、辺集合を R とする有向グラフ G を図示しなさい。

解答:



(3-b) 有向グラフ G の頂点の数、辺の数、最長の単純道（同じ辺を 2 回以上通らない長さ 1 以上の道）の長さをそれぞれ答えよ。

解答: 頂点の数は 6, 辺の数は 12, 最長の単純道としては例えば

$\langle\langle 1,2,3\rangle,\langle 2,1,3\rangle,\langle 1,3,2\rangle,\langle 3,2,1\rangle,\langle 2,1,3\rangle\langle 1,2,3\rangle,\langle 2,3,1\rangle,\langle 3,2,1\rangle,\langle 2,3,1\rangle,\langle 3,1,2\rangle,\langle 1,3,2\rangle,\langle 3,1,2\rangle,\langle 1,2,3\rangle\rangle$

があり、その長さは 12。

(3-c) 有向グラフ G において、頂点 $\langle 1,2,3\rangle$ を始点とし、頂点 $\langle 3,1,2\rangle$ を終点とする単純道で長さが 4 であるものの数を答えよ。

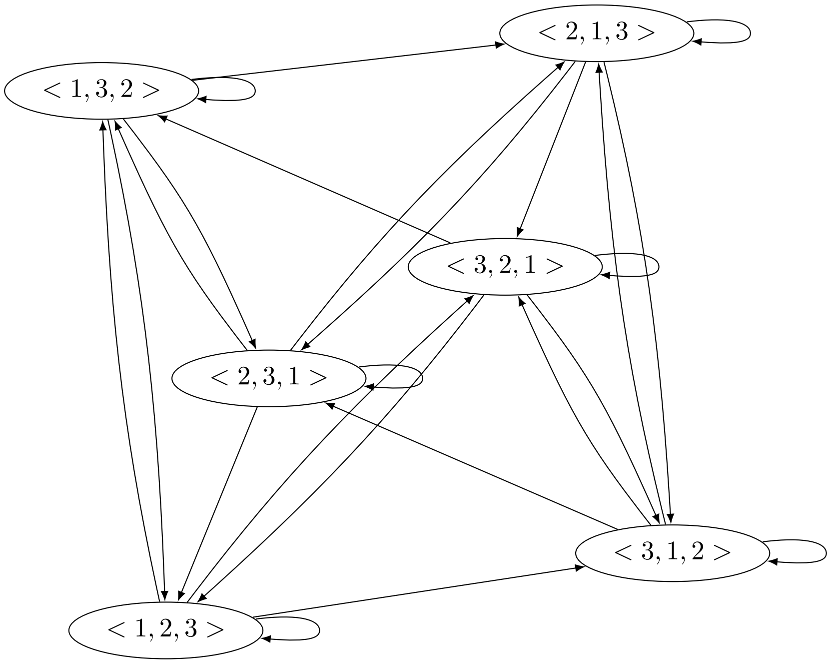
解答: 以下の 3 つである。

- $\langle\langle 1,2,3\rangle,\langle 2,1,3\rangle,\langle 1,2,3\rangle,\langle 2,3,1\rangle,\langle 3,1,2\rangle\rangle$
- $\langle\langle 1,2,3\rangle,\langle 2,3,1\rangle,\langle 3,2,1\rangle,\langle 2,3,1\rangle,\langle 3,1,2\rangle\rangle$

- $\langle\langle 1,2,3\rangle, \langle 2,3,1\rangle, \langle 3,1,2\rangle, \langle 1,3,2\rangle, \langle 3,1,2\rangle\rangle$

(3-d) 合成関係 $R \circ R$ が反射的、対称的であるかそれぞれ理由をつけて答えよ。

解答: 参考のため $R \circ R$ を辺に持つグラフを図示すると以下のようになる。



$T \circ T = \{\langle\langle x_1, x_2, x_3\rangle, \langle x_1, x_2, x_3\rangle\rangle \mid \langle x_1, x_2, x_3\rangle \in V\} \subseteq R \circ R$ なので $R \circ R$ は反射的である。$\langle 1,2,3\rangle R \circ R\langle 3,1,2\rangle$ だが $\langle 3,1,2\rangle R \circ R\langle 1,2,3\rangle$ でないので $R \circ R$ は対称的でない。

(3-e) 2 項関係 $S \circ S \circ S$ が半順序であるか理由をつけて答えよ。また、2 項関係 $T \circ T$ が同値関係であるか理由をつけて答えよ。

解答: $S \circ S \circ S = T \circ T = \{\langle\langle x_1, x_2, x_3\rangle, \langle x_1, x_2, x_3\rangle\rangle \mid \langle x_1, x_2, x_3\rangle \in V\} = \{\langle v_1, v_2\rangle \in V \times V \mid v_1 = v_2\}$ である。すべての $v \in V$ について $v = v$ なので $S \circ S \circ S = T \circ T$ は反射的である。すべての $v_1, v_2 \in V$ について $v_1 = v_2$ ならば $v_2 = v_1$ なので $S \circ S \circ S = T \circ T$ は対称的である。すべての $v_1, v_2, v_3 \in V$ について $v_1 = v_2$ かつ $v_2 = v_3$ ならば $v_1 = v_3$ なので $S \circ S \circ S = T \circ T$ は推移的である。すべての $v_1, v_2 \in V$ について $v_1 = v_2$ かつ $v_2 = v_1$ ならば $v_1 = v_2$ なので $S \circ S \circ S = T \circ T$ は反対称的である。したがって、$S \circ S \circ S$ は反射的、推移的、反対称的なので半順序であり、$T \circ T$ は反射的、対称的、推移的なので同値関係である。

問 4. (配点 20 点)

(4-a: 4 点) $\langle\langle\langle 0\rangle, \langle 3,1\rangle\rangle, 2\rangle$ は T の要素であるか否か、理由をつけて答えよ.

解答: 0 は T の要素である。したがって $\langle 0\rangle$ は T の要素である。また、3 と 1 はそれぞれ T の要素である。したがって $\langle 3,1\rangle$ は T の要素である。以上のことから、$\langle\langle 0\rangle, \langle 3,1\rangle\rangle$ は T の要素である。また、2 は T の要素である。以上の結果から、問題の $\langle\langle\langle 0\rangle, \langle 3,1\rangle\rangle, 2\rangle$ は T の要素であるといえる。

(4-b: 5 点) 与えられた T の要素 t に対して，t の葉に現れる自然数のうちの最大のものを求める関数 $f : T \to \mathcal{N}$ を帰納的に定義せよ．ただし，与えられた 2 つの自然数の最大値を求める関数 $Max : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ を用いてよい.

解答: T の定義に沿って f を定義すればよい。答えは以下の通りである。

$$f(t) = \begin{cases} n & (t = n \in \mathcal{N} \text{ のとき}) \\ Max(f(L), f(R)) & (t = \langle L, R\rangle \text{ のとき}) \\ Max(f(L)) & (t = \langle L\rangle \text{ のとき}) \end{cases}$$

(4-c: 4 点) $g(\langle\langle 3,1\rangle,\langle 2\rangle\rangle)$ を，$\oplus$ および g の定義に従って計算せよ．ただし，計算の過程も明記すること．

解答:

$$
\begin{aligned}
g(\langle\langle 3,1\rangle,\langle 2\rangle\rangle) &= g(\langle 3,1\rangle)\oplus g(\langle 2\rangle)\\
&= (g(3)\oplus g(1))\oplus g(2)\\
&= (\langle 3\rangle\oplus\langle 1\rangle)\oplus\langle 2\rangle\\
&= \mathit{cons}(3,\langle\ \rangle\oplus\langle 1\rangle)\oplus\langle 2\rangle\\
&= \mathit{cons}(3,\langle 1\rangle)\oplus\langle 2\rangle\\
&= \mathit{cons}(3,\langle 1\rangle\oplus\langle 2\rangle)\\
&= \mathit{cons}(3,\mathit{cons}(1,\langle\ \rangle\oplus\langle 2\rangle))\\
&= \mathit{cons}(3,\mathit{cons}(1,\langle 2\rangle))\\
&= \langle 3,1,2\rangle
\end{aligned}
$$

(4-d: 7 点) Base Case を書き直して新しく定義された T に関して,「任意の $t\in T$ について $h(g(t))$ が偶数となる」ことを，t に関する帰納法により証明せよ．ただし，証明の中で,「任意の $L_1, L_2 \in List_{\mathcal{N}}$ について，$h(L_1\oplus L_2)=h(L_1)+h(L_2)$」が成り立つことを証明なしに用いてよいものとする．

解答:

証明: t に関する帰納法により証明する．

- Base Case (t が偶数 $n\in\mathcal{N}$ のとき):
  このとき、$h(g(n))=h(n)=n$ となり、n は偶数であることから明らか.
- Induction Step 1 ($t=\langle L,R\rangle$ のとき):
  g の定義より、$h(g(\langle L,R\rangle))=h(g(L)\oplus g(R))$。よって、定理から $h(g(L))+h(g(R))$。帰納法の仮定より、$h(g(L))$ と $h(g(R))$ はともに偶数である。ゆえに、$h(g(\langle L,R\rangle))$ は偶数である。
- Induction Step 2 ($t=\langle L\rangle$ のとき):
  g の定義より、$h(g(\langle L\rangle))=h(g(L))$。帰納法の仮定より、$h(g(L))$ は偶数であるから、$h(g(\langle L\rangle))$ もまた偶数である。

□

なお、証明中で用いた「任意の $L_1,L_2\in List_{\mathcal{N}}$ について $h(L_1\oplus L_2)=h(L_1)+h(L_2)$」は、以下のようにして示すことができる。

証明：L_1 に関する帰納法により示す。

- Base Case (L_1 が $\langle\ \rangle$ のとき)：
  このとき、$h(\langle\ \rangle\oplus L_2)=h(L_2)=0+h(L_2)=h(\langle\ \rangle)+h(L_2)$ より明らか。
- Induction Step (L_1 が $\mathit{cons}(n,L_1')$ のとき):
  このとき、

$$
\begin{aligned}
h(\mathit{cons}(n,L_1')\oplus L_2) &= h(\mathit{cons}(n,L_1'\oplus L_2)) && (\oplus\text{の定義より})\\
&= h(L_1'\oplus L_2)+n && (h\ \text{の定義より})\\
&= h(L_1')+h(L_2)+n && (\text{帰納法の仮定より})\\
&= h(L_1)+h(L_2) && (h\ \text{の定義より})
\end{aligned}
$$

□