離散構造 期末試験, 2014年 12月 26日 (金)

解答用紙は2枚である．**2枚ともに**，学籍番号と氏名を記入すること．裏を使用してもよい．問1と問2の解答を1枚の解答用紙に、問3と問4の解答を別の1枚の解答用紙に記入しなさい。(それぞれの解答用紙の中では、問題の順番通りに解答を記述する必要はない．) それぞれの解答の冒頭には，必ず**問題番号を明記**せよ．

問 1．(配点 20 点) A さんと B さんは、とあるコンビニでアルバイトをしている。ある日店長は、二人の大晦日と元日のシフト（勤務スケジュール）を決めるため、A、B および店の都合を確認した。すると、以下の5つの条件を満たすことが希望として挙げられた。

- 条件1：A が大晦日と元日の両日とも働く、ということはない。
- 条件2：大晦日も元日も、少なくとも誰か一人は働いている。
- 条件3：元日に A と B が共に働く、ということはない。
- 条件4：B が大晦日に働くならば、B は元日に働くことはない。
- 条件5：B が働いている日は、A も一緒に働く。

なお、ここで考えているシフトは、A と B がそれぞれ大晦日と元日に働くか否かを決めるものであり、全部で16通りの組み合わせがある。（例えば、「A が大晦日と元日に働き、B が元日のみ働く」というのは、シフトの一つである。）このとき、以下の問いに答えよ。

(1-a) 次の原子文 P, Q, R, S を使って、上記の条件1から5をそれぞれ命題論理の論理式を使って表現せよ。

- P：A が大晦日に働く。
- Q：A が元日に働く。
- R：B が大晦日に働く。
- S：B が元日に働く。

(1-b) 条件1、2、3を全て満たす（ただし、条件4と5は必ずしも満たされるとは限らない）シフトは、全部で何通りあるか答えよ。

(1-c) 条件1から4を全て満たすようなシフト（条件5は満たさなくてもよい）では、いずれも「B が元日に働くならば、B は大晦日に働かない」ということが成り立つか否かを答えよ。

(1-d) 条件2から5の全てを満たすようなシフトのうち、B が大晦日も元日も働かないようなシフトは存在するか否かを答えよ。また、存在する場合は、そのようなシフトを全て具体的に示せ。

問 2．(配点 30 点)

(2-a) $\mathcal{N}$ を、すべての自然数からなる集合とする。$n \in \mathcal{N}$ に対して、n より小さい自然数の集合 $\mathcal{N}_n$ を、適当な論理式 $P(x)$ を用いて、$\{x \in \mathcal{N} \mid P(x)\}$ の形で定義せよ。ただし、$0 \in \mathcal{N}$ であり、$n \notin \mathcal{N}_n$ であることに注意せよ。

(2-b) $f : \mathcal{N}_5 \to \mathcal{N}_5$ となる関数で、$f(0) = 1$ かつ、$f \circ f$ が恒等関数であるものを1つ示しなさい。(ただし、関数 $g : S \to S$ が恒等関数であるとは、任意の $x \in S$ に対して $g(x) = x$ となるもののことである。)

また、自分が示した関数 f による集合 $\{0, 1, 2\}$ の像 $f(\{0, 1, 2\})$ を計算しなさい。

(2-c) $f : \mathcal{N}_5 \to \mathcal{N}_5$ に対して、(i) $f(0) = 1$ となる f の個数、(ii) $f \circ f$ が恒等関数となる f の個数、(iii) $f(0) = 1$ であるか、または、$f \circ f$ が恒等関数となるような f の個数を、それぞれ求めなさい。

(2-d) 以下の証明課題の少なくとも1つを証明せよ。(両方証明した場合は、内容によって加点対象とする。)

(2-d-1) 任意の集合 S_1, S_2, S_3 に対して、$((S_1 - S_2) \cup S_3) \subset ((S_1 \cup S_3) - (S_2 - S_3))$ を証明せよ。ここで、$\subset$ の記号は、部分集合を表す。

(2-d-2) 関数 $f_1 : \mathcal{N}_5 \to \mathcal{N}_7$, $f_2 : \mathcal{N}_7 \to \mathcal{N}_{10}$、$f_3 : \mathcal{N}_{10} \to \mathcal{N}_5$ に対して、もし、$f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ が単射であれば f_1 は単射であることを示しなさい。

問 3. (配点 30 点)

集合 $V = \{1, 2, \ldots, 12\}$ とし、V 上の 2 項関係 R を以下のように定める。

$$x\ R\ y \Leftrightarrow y = (2 \cdot x) \bmod 13 \vee y = (7 \cdot x) \bmod 13$$

(3-a) 有向グラフ G は、頂点の集合が V であり、頂点 x から頂点 y への辺があることと $x\ R\ y$ が成立することが同値であると定義する。このとき有向グラフ G を図示しなさい。

(3-b) 有向グラフ G の頂点の数、辺の数、最も長い単純道（同じ辺を 2 回以上通らない道）の長さをそれぞれ答えよ。

(3-c) 頂点 1 を始点とし、同じく頂点 1 を終点とする単純道で長さが 4 であるものの数を答えよ。

(3-d) 2 項関係 R が対称的、推移的であるかそれぞれ理由をつけて答えよ。また、2 項関係 $R \circ R$ が反射的、反対称的であるかそれぞれ理由をつけて答えよ。

(3-e) 2 項関係 S を以下のように定める。

$$x\ S\ y \Leftrightarrow \text{「有向グラフ } G \text{ において、} x \text{ から } y \text{ への道が存在する」}$$

（ここで、任意の頂点 x について x から x への長さ 0 の道が必ず存在することに注意）このとき S が半順序であるか同値関係であるか、それぞれ理由をつけて答えよ。

問 4. (配点 20 点)

自然数の集合を $\mathcal{N}$ とする。ここで、集合 $A = \{0, 1, 2\}$ の要素からなるリストの集合 $List_A$ を、以下のように帰納的に定義する。

- $\langle\ \rangle$ は $List_A$ の要素である。
- L が $List_A$ の要素であり、かつ x が A の要素であるならば、$\mathrm{cons}(x, L)$ は $List_A$ の要素である。

このとき、以下の問いに答えよ。

(4-a) $List_A$ に含まれる長さ 1 以上のリスト $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$（ただし $n \geq 1$）のうち、以下の 2 つの条件を満たすリストを全て集めてできる集合 S を、帰納的に定義せよ。

- $a_n = 2$
- $a_1, \ldots, a_{n-1}$ の部分は、0 と 1 が交互に並ぶ（ただし、並びの最初は 0 でも 1 でもよいとする。また、0 の出現する個数と 1 の出現する個数は、一致していなくてもよいとする)。

（例えば、$\langle 2 \rangle$ や $\langle 1, 2 \rangle$ や $\langle 0, 1, 0, 2 \rangle$ は、いずれも S の要素であるが、$\langle 1, 1, 0, 2 \rangle$ や $\langle 1, 0, 1, 0 \rangle$ や $\langle 2, 1, 0 \rangle$ は、いずれも S の要素ではない。）

(4-b) 与えられたリスト $L \in List_A$ に対して、L に現れる 1 を全て消去して得られるリストを返す関数 $del : List_A \to List_A$ を帰納的に定義せよ。（ここで意図する関数 del は、例えば、$del(\langle 0, 1, 2, 1, 0 \rangle) = \langle 0, 2, 0 \rangle$、$del(\langle 0 \rangle) = \langle 0 \rangle$ が成り立つものである。）

次に、$\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{d}, \mathtt{x}, \mathtt{[}, \mathtt{]}\}$ を文字集合（アルファベット）とする文字列の集合を Σ^* とする。ここで、Σ^* の部分集合 E を、以下のように帰納的に定義する。

- $\mathtt{0}$ は E の要素である。
- e が E の要素であるならば、$\mathtt{[}e\mathtt{x]}$ は E の要素である。
- e が E の要素であるならば、$\mathtt{d}e$ は E の要素である。

また、関数 $f : List_A \to E$ と関数 $g_k : E \to \mathcal{N}$（ただし $k \in \mathcal{N}$）を、それぞれ以下のように帰納的に定義する。

$$f(L) = \begin{cases} \mathtt{0} & (L = \langle\ \rangle) \\ f(L') & (L = \mathrm{cons}(0, L')) \\ \mathtt{[}f(L')\mathtt{x]} & (L = \mathrm{cons}(1, L')) \\ \mathtt{d}f(L') & (L = \mathrm{cons}(2, L')) \end{cases}$$

$$g_k(e) = \begin{cases} 0 & (e = \mathtt{0}) \\ g(e') + k & (e = \mathtt{[}e'\mathtt{x]}) \\ g(e') \times 2 & (e = \mathtt{d}e') \end{cases}$$

なお g_k の定義の右辺に出てくる「+」と「×」は、それぞれ自然数上の足し算、かけ算を表すものとする。

(4-c) $f(\langle 1, 2, 0, 1, 2 \rangle)$ を、f の定義に従って計算せよ。ただし、計算の過程も明記すること。

(4-d) $g_3(\mathtt{[dd[0x]x]})$ を、g_k の定義に従って計算せよ。ただし、計算の過程も明記すること。

(4-e) 任意の偶数 k と任意の $L \in List_A$ に対して、$g_k(f(L))$ が偶数となることを、L の帰納法により証明せよ。