離散構造 期末試験, 2013年 12月 20日 (金)

解答用紙は2枚である．**2枚ともに**，学籍番号と氏名を記入すること．裏を使用してもよい．問1と問2の解答を1枚の解答用紙に、問3と問4の解答を別の1枚の解答用紙に記入しなさい。(それぞれの解答用紙の中では、問題の順番通りに解答を記述する必要はない．) それぞれの解答の冒頭には，必ず**問題番号を明記**せよ．

問1．(配点20点)

太郎君と二郎君は、新年度から引っ越しをして2人でルームシェアをすることになった。ある日、2人で不動産屋に行き、以下のような5つの希望を店員に伝えた。

- 希望1：家賃が8万円以上でかつ床が全て畳（フローリングでない)、ということはない。
- 希望2：風呂・トイレがユニットバスで駐車場が付いていないなら、家賃は8万円未満である。
- 希望3： 床が畳なら、風呂・トイレは別（ユニットバスではない）である。
- 希望4： 家賃が8万円以上かユニットバスであるかの少なくとも一方である場合は、駐車場が付いている。
- 希望5： 家賃が8万円未満で、なおかつ駐車場が付いている。

すると、店員は以下の物件 (A) から (D) が空いていると言った。

	物件 (A)	物件 (B)	物件 (C)	物件 (D)
家賃	7万円	3万円	12万円	9万円
風呂・トイレ	ユニットバス	ユニットバス	別	別
駐車場	付	無	付	無
床	畳	畳	フローリング	フローリング

このとき、以下の問いに答えよ。

(1-a) 次の原子文 P, Q, R, S を使って、上記の希望1から5をそれぞれ命題論理の論理式を使って表現せよ。

- P：家賃が8万円以上である。
- Q：風呂・トイレがユニットバスである。
- R：駐車場が付いている。
- S：床がフローリングである。

(1-b) 店員は、希望2を聞いたとき、「そのご希望はつまり、“風呂・トイレがユニットバスでないか、駐車場が付いているか、家賃が8万円未満かの少なくともいずれか1つが満たされている” ということですね」と言った。この言い換えが正しいかどうか（つまり希望2と店員による言い換えた文とが同値の関係であるかどうか)、理由をつけて答えよ。

(1-c) 上のAからDの中から、希望1, 2, 3を全て満たす（希望4と5は満たさなくてもよい）ものを全て挙げよ。

(1-d) 物件Cは希望1から5の全てを満たしてはいない。5つの希望の中からどれか1つの希望をあきらめれば、物件Cは残りの全ての希望を満たせるか。もしそうであれば、あきらめるべき希望を1つ、理由をつけて挙げよ。そうでなければ、その理由を述べよ。

(1-e) 店員は、物件Aについて「もしも入居してくれるのなら、家賃と駐車場はそのままで、ユニットバスを風呂・トイレ別に改装するか、あるいは床をフローリングに改装します」と言った。この改装により、物件Aは希望1から5を全て満たせるか。理由をつけて答えよ。（ただし、この提案条件はこの問いだけに適用されるものとし、問題 (1-c) には適用されないものとする。）

問 2. (配点 30 点)

(2-a) $\mathcal{Z}$ を全ての整数からなる集合とし、関数 $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ を $f(x) = x^2 + 1$ と定める。関数 f による集合 A の像を $f(A)$ と書く。たとえば、$f(\{1, 2, -3\}) = \{2, 5, 10\}$ である。

以下の命題が成立するかどうか調べよ。(成立する場合はその根拠を述べ、成立するとは限らない場合は具体的な反例を 1 つ与えよ。)

(2-a-1) すべての $A \subset \mathcal{Z}$ と $B \subset \mathcal{Z}$ に対して $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ である。

(2-a-2) すべての $A \subset \mathcal{Z}$ と $B \subset \mathcal{Z}$ に対して $f(A - B) = f(A) - f(B)$ である。

(2-b) $\mathcal{N}_k = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 \leq x < k\}$ とする．($0 \in \mathcal{N}_k$ であること、また、$k \notin \mathcal{N}_k$ であることに注意せよ。)

$i = 1, 2$ に対して関数 $f_i : \mathcal{N}_{225} \to \mathcal{N}_{15}$ を

$$f_1(x) = x \ \texttt{mod}\ 15$$
$$f_2(x) = x \ \texttt{div}\ 15$$

により定義する。ただし、自然数 m と 1 以上の自然数 n に対して、$m \ \texttt{mod}\ n$ は m を n で割った余りを表し、$m \ \texttt{div}\ n$ は m を n で割った整数上の商 (小数点以下を切り捨てた割り算の答) を表す。たとえば、$f_1(153) = 3,\ f_2(153) = 10$ である。このとき、以下の問に答えなさい。

(2-b-1) 関数 $h : \mathcal{N}_{15} \to \mathcal{N}_{225}$ を $h(x) = x^2$ により定義する。h と $f_1 \circ h$ と $f_2 \circ h$ のうち、単射であるものをすべて示しなさい。(それぞれ、簡単に根拠を述べなさい。)

(2-b-2) $k : \mathcal{N}_{225} \to (\mathcal{N}_{15} \times \mathcal{N}_{15})$ となる関数 k のうち、全単射となるものを 1 つ示しなさい。(簡単に根拠を述べなさい。)

(2-b-3) 関数 $g_i : \mathcal{N}_{1000} \to \mathcal{N}_{15}$ (ただし $i = 1, 2$) を、$g_1(x) = x \ \texttt{mod}\ 7$、$g_2(x) = x \ \texttt{mod}\ 13$ により定義すると、$f_1 \circ j = g_1$ かつ $f_2 \circ j = g_2$ となる関数 $j : \mathcal{N}_{1000} \to \mathcal{N}_{225}$ が存在する。そのような関数 j を具体的に示しなさい。(j が複数ある場合は、そのうちの 1 つを示しなさい。)

(2-b-4) 関数 $g_i : \mathcal{N}_{1000} \to \mathcal{N}_{15}$ (ただし $i = 1, 2$) が与えられたとする。このとき、(どんな関数 g_1, g_2 であっても) $f_1 \circ j = g_1$ かつ $f_2 \circ j = g_2$ となる関数 $j : \mathcal{N}_{1000} \to \mathcal{N}_{225}$ が存在することを示しなさい。(加点問題: もし余力があれば、そのような関数 j がただ 1 つ存在することを示しなさい。)

問 3. (配点 30 点)

集合 $A = \{1, 2, 3\}$ とし、A のべき集合 $2^A = \{X \mid X \subset A\}$ 上の 2 項関係 $R \subset 2^A \times 2^A$ を以下のように定める。

$$X \ R \ Y \Leftrightarrow X \subset Y \wedge \#Y = \#X + 1$$

ここで、$\#X$ は集合 X の要素数を表す。

(3-a) 2^A を頂点の集合、R を辺の集合として持つ有向グラフを以後 G と呼ぶ。有向グラフ G を図示しなさい。ただし、辺の向きと各頂点に対応する 2^A の要素が、図からはっきり読み取れるようにすること。

(3-b) 有向グラフ G の頂点の数と辺の数をそれぞれ答えよ。

(3-c) 有向グラフ G の、長さ 3 の単純道 (同じ辺を 2 回以上通らない道) の数を答えよ。

(3-d) 2^A 上の 2 項関係 S を以下のように定める。

$$S = \{\langle X, X \rangle \mid X \in 2^A\} \cup R \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R)$$

$S \circ R \subset S$ が成立するかどうか理由とともに答えよ。

(3-e) S が順序 (半順序ともいう) であるか、また同値関係であるか、それぞれ理由とともに答えよ。

問 4. (配点 20 点)

自然数の集合を $\mathcal{N}$ とする。$\Sigma = \{1, 2, +, \times, (,)\}$ 上の文字列の集合 S を、以下の帰納的定義によって与える。（なお、以下で S の要素を「...」で囲むことにより、説明文と区別する。）

- 「1」、「2」はそれぞれ S の要素である。
- s が S の要素で、n が「1」か「2」であるならば、「$(s+n)$」は S の要素である。
- s が S の要素であれば、「$1 \times s$」は S の要素である。

このとき、以下の問いに答えよ。

(4-a) 文字列「$(1 \times 1 \times (2+1)+2)$」は S の要素であるかどうか、理由を付けて答えよ。

(4-b) 文字列 $s \in S$ に出現する「+」の個数と「×」の個数の和を計算する関数 $count : S \to \mathcal{N}$ を帰納的に定義せよ。（ここで意図する関数は、例えば $count((1 \times (1+2)+1)) = 3$ となるものである。）

次に、関数 $f : S \to List_{\mathcal{N}}$ と関数 $g : List_{\mathcal{N}} \to \mathcal{N}$ を、以下のように帰納的に定義する。

$$f(s) = \begin{cases} \langle 1 \rangle & (\text{if } s = \text{「}1\text{」}) \\ \langle 2 \rangle & (\text{if } s = \text{「}2\text{」}) \\ \mathrm{cons}(n, f(t)) & (\text{if } s = \text{「}(t+n)\text{」}) \\ f(s') & (\text{if } s = \text{「}1 \times s'\text{」}) \end{cases}$$

$$g(L) = \begin{cases} 0 & (\text{if } L = \langle\ \rangle) \\ g(L') + n & (\text{if } L = \mathrm{cons}(n, L')) \end{cases}$$

ここで、$\langle 2 \rangle$ は $\mathrm{cons}(2, \langle\ \rangle)$ というリストをあらわし、$\langle\ \rangle$ は空リストをあらわす。

(4-c) $f((1 \times ((2+1)+2)+1))$ を、f の定義に従って計算せよ。ただし、計算の過程も明記すること。

(4-d) $g(\mathrm{cons}(1, \mathrm{cons}(2, \mathrm{cons}(1, \langle\ \rangle))))$ を、g の定義に従って計算せよ。ただし、計算の過程も明記すること。

(4-e) ここで関数 $calc : S \to \mathcal{N}$ を帰納的に定義する。

$$calc(s) = \begin{cases} 1 & (\text{if } s = \text{「}1\text{」}) \\ 2 & (\text{if } s = \text{「}2\text{」}) \\ calc(t) + n & (\text{if } s = \text{「}(t+n)\text{」}) \\ calc(t) & (\text{if } s = \text{「}1 \times t\text{」}) \end{cases}$$

つまり $calc$ は、S の要素 s を数式と見なしたときに、s を計算して得られた結果を返す関数である。

この $calc$ と、先に定義した f と g に対して、「任意の $s \in S$ について、$calc(s) = g(f(s))$ が成り立つ」ことを、s に関する帰納法により証明せよ。