離散構造 期末試験 解答例, 2013 年 3 月 8 日 (金)

問 1

(1-a) 次の原子文 P，Q，R，S を使って，上記の 5 つの条件をそれぞれ命題論理の論理式によって表現せよ．

答 (配点 2 点 ×5)：それぞれ以下の通り．

- ルール 1：$P \wedge Q \Rightarrow S$
- ルール 2：$\neg Q \Rightarrow \neg P$
- ルール 3：$\neg P \wedge \neg Q \Rightarrow \neg S$
- ルール 4：$Q \wedge R \Rightarrow S$
- ルール 5：$R \Leftrightarrow P \vee Q$

(1-b) ルール 1，2，3 が全て満たされるとき（ただしルール 4 と 5 は満たされているかどうか分からないとき），「人事課長か財務課長の少なくとも一方が応募者の承認をする場合，応募者は採用される」という命題が常に成り立つか否かを答えよ．

答 (配点 5 点)：解答を示す前に，真理値表による分析結果を以下に示す．

行番号	P	Q	R	S	ルール 1	ルール 2	ルール 3	ルール 4	ルール 5
1	T	T	T	T	T	T	T	T	T
2	T	T	T	F	F	T	T	F	T
3	T	T	F	T	T	T	T	F	F
4	T	T	F	F	F	T	T	F	F
5	T	F	T	T	T	F	T	T	T
6	T	F	T	F	T	F	T	T	T
7	T	F	F	T	T	F	T	T	F
8	T	F	F	F	T	F	T	T	F
9	F	T	T	T	T	T	T	T	T
10	F	T	T	F	T	T	T	F	T
11	F	T	F	T	T	T	T	T	F
12	F	T	F	F	T	T	T	T	F
13	F	F	T	T	T	T	F	T	F
14	F	F	T	F	T	T	T	T	F
15	F	F	F	T	T	T	F	T	T
16	F	F	F	F	T	T	T	T	T

（ここで,「ルール n」は，対応する論理式を表している．また,「行番号」は，後の解説の都合上つけたものであり、論理学な意味はない.）

さて，ルール 1〜3 がともに T となる行（つまり，ルール 1〜3 がすべて満たされる場合）は，1，3，9，10，11，12，14，16 行目である．また，問題となる命題を論理式で表すと，$P \vee Q \Rightarrow S$ となる．よって，この命題が上記の 8 つの行のいずれにおいても真となれば，この命題が成り立つことが分かる．真理値分析をすると，10 行目と 12 行目で $P \vee Q \Rightarrow S$ が偽となることが分かる．よって，この命題は常には成り立たない.

(1-c) ルール 1，3，4，5 が全て満たされるとき（ただしルール 2 は満たされているかどうか分からないとき），財務課長が応募者の採用を承認し，人事課長も役員会議も採用を承認せず，なおかつ応募者が採用されないようなことが起こり得るか否かを答えよ．

答 (配点 5 点)：上の真理値表から，ルール 1，3，4，5 をいずれも満たす場合は，1，5，6，9，16 行目であることが分かる.（つまり，これらのルールを全て満たすとき，現実に起こり得る組み合わせは，上記の 5 通り

である.）一方，問題となる命題が示す場合は，真理値表の 12 行目に対応する．よって,「財務課長のみが応募者の採用を承認し，人事課長も役員会議も採用を承認せず，なおかつ応募者が採用されないようなこと」は起こり得ないことが分かる．

(1-d) ルール 1 から 5 が全て満たされているとする．このとき，応募者が採用されるための必要十分条件を，S を含まない論理式として表せ．

答 (配点 5 点)：上の真理値表から，全てのルールを満たす場合に起こり得る組み合わせは，1，9，16 行目の 3 通りあることが分かる．これらのうち 1,9 行で真となり，16 行目で偽となる論理式が求めるものである．そのような論理式は複数あるので，例をあげると，Q, R, $Q \vee R$, $Q \wedge R$ などである (この他にも正解はある).

問 2

(2-a) $y = 0, 1, 2, 3$ に対して $f(\langle 3, y\rangle)$ の値を計算することにより，h_3 による $\mathcal{N}_3$ の像 $h_3(\mathcal{N}_3)$ を求めなさい．

答 (配点 5 点): $f(\langle 3,0\rangle) = 6$, $f(\langle 3,1\rangle) = 7$, $f(\langle 3,2\rangle) = 8$, $f(\langle 3,3\rangle) = 9$ であるので，$h_3(\mathcal{N}_3) = \{6, 7, 8, 9\}$ である．

(2-b) i を自然数とするとき，関数 h_i が単射であるか，答えなさい．(簡潔に理由を述べなさい．)

答 (配点 5 点): どの i に対しても h_i は単射である．

なぜなら，$h_i(y_1) = h_i(y_2)$ とすると，h_i の定義より，$\frac{i^2+i}{2} + y_1 = \frac{i^2+i}{2} + y_2$ となり，$y_1 = y_2$ が導けるから．

(2-c) i を自然数とするとき，関数 h_i が全射であるか，答えなさい．(簡潔に理由を述べなさい．)

答 (配点 5 点): どの i に対しても h_i は全射でない．

この事を示すため，$n_i = \frac{i^2+i}{2} + i + 1$ とおく．$n_i \in \mathcal{N}$ である．また，$h_i(y) < n_i$ であるので，$h_i(y) = n_i$ となる $y \in \mathcal{N}_i$ は存在しない．よって h_i は全射ではない．

(このように言うかわりに,「h_i の定義域は有限集合なのに，コドメインが無限集合なので，全射になり得ない」という答えでもよい．)

(2-d) 自然数 i, j, x_1, x_2 に対して，$i < j$, $x_1 \in \mathcal{N}_i$, $x_2 \in \mathcal{N}_j$ であるとする．この時，$h_i(x_1) < h_j(x_2)$ であることを示しなさい．ただし，任意の $x \in \mathcal{N}$ に対して，$f(\langle x, x\rangle) < f(\langle x+1, 0\rangle)$ であることを証明なしに使ってもよい．

答 (配点 5 点): まず，$h_i(x_1) = f(\langle i, x_1\rangle) \le f(\langle i, i\rangle) < f(\langle i+1, 0\rangle) \le f(\langle i+1, x_2\rangle) = h_{i+1}(x_2)$ である．これを繰返し使って，$i < j$ ならば，$h_i(x_1) < h_j(x_2)$ が言える．

補足：最後の「これを繰返し使って」というところは、厳密に証明するならば数学的帰納法を使うことになるが，本問ではそこまでは求めないこととし，厳密に証明していたら，加点する．

(2-e) f の定義域が S であることに注意して，f が逆関数をもつかどうか，理由とともに答えなさい．

答 (配点 5 点): f は全単射であるので，逆関数を持つ．

単射である理由: $f(\langle x_1, y_1\rangle) = f(\langle x_2, y_2\rangle)$ と仮定する．

前問 (2-d) の結果より，$x_1 \ne x_2$ ならば，h_{x_1} と h_{x_2} の値域は，重ならない (共通部分が空集合) ので，$x_1 = x_2$ である．すると，$h_{x_1}(y_1) = h_{x_1}(y_2)$ となり，h_{x_1} が単射であることから，$y_1 = y_2$ となる．以上より，$\langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle$ が言えたので，f は単射である．

全射である理由: 任意の自然数 k を取る．k に対して，$\frac{x(x+1)}{2} \le k < \frac{(x+1)(x+2)}{2}$ となる $x \in \mathcal{N}$ が存在する．そのような x に対して，$y = k - \frac{x(x+1)}{2}$ と置くと，$0 \le y \le x$ である．(このことを厳密に示すのは以下の通り：まず $0 \le y$ は自明である．また、$\frac{(x+1)(x+2)}{2} - \frac{x(x+1)}{2} = x + 1$ であるので，$y < x + 1$ となる．よって，$0 \le y \le x$ である.）$f(\langle x, y\rangle) = k$ となる．そのような $\langle x, y\rangle \in S$ が存在するので，f は全射である．

補足：全射の証明を上のようにきちんとやるのは難しいと思われる．そこで，採点にあたっては、 f によってコドメインの要素が「もれなく」, 定義域の要素に対応付けられることを，言葉で説明できていれば良いものとする．

問 3 (関係とグラフ)

$T = \{x \in \mathcal{N} \mid 1 \leq x \leq 15\}$ と定め，T 上の二項関係 R_i $(i = 1, 2, 3)$ を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
(x\ R_1\ y) &\Leftrightarrow\ ((y = 2x) \vee (y = 2x + 1)) \\
(x\ R_2\ y) &\Leftrightarrow\ x\ \text{の約数はすべて}\ y\ \text{の約数である} \\
(x\ R_3\ y) &\Leftrightarrow\ (3^x - 3^y)\ \text{が 15 で割り切れる}
\end{aligned}
$$

なお，R_3 の右辺の $3^x - 3^y$ は，負の数でもよいことに注意せよ．たとえば，$1\ R_3\ 5$ は $3^1 - 3^5 = -240$ が 15 で割り切れるので成立する．

(3-a) 集合 T の要素を頂点とし，$x\ R_1\ y$ が成立するときに，頂点 x から頂点 y への辺があるとして構成される有向グラフを図示しなさい．(以降では，この有向グラフを G_1 とする．)

答 (配点 5 点): 図 1 の通り．

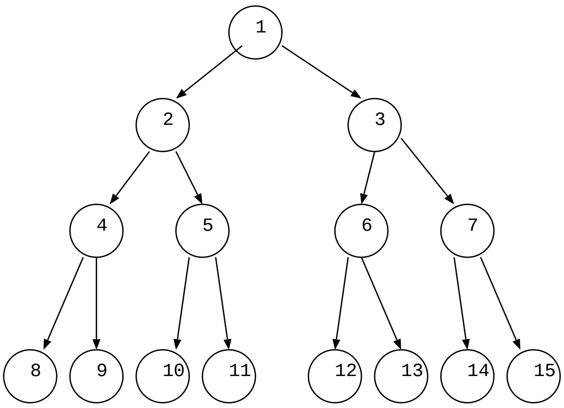

図 1: (3-a) の解答

補足: 「2 分木 (binary tree)」の形をした有向グラフである．情報科学類の学生としては、上図のように「2 分木らしい絵」を書いてくれると期待している．

(3-b) 有向グラフ G_1 の頂点の数，辺の数，最も長い単純道 (同じ辺を 2 回以上通らない道) の長さを答えなさい．

答 (配点 5 点): 頂点は明らかに 15 個ある．頂点 x から y へ行く辺について考えると，$2 \leq y \leq 15$ となる y に対して $x\ R_1\ y$ が成立する x はちょうど 1 つだけある．また，$y = 1$ に対しては $x\ R_1\ y$ となる x は存在しない．よって，辺は 14 本ある．

グラフから，単純道 (この場合は「道」といっても同じである) の長さの最大値は 3 である．

(3-c) R_3 に対して，$x\ R_3\ 1$ が成立する $x \in T$ を全て列挙しなさい．

答 (配点 5 点): $3^x \equiv 3 \bmod 15$ となる x を探す．a と b が 15 で割った余りが等しいとき, $a \equiv b$ と書くことにする．

計算により $3^4 \equiv 1$ がわかる．また，$3 \not\equiv 1$, $3^2 \not\equiv 1$, $3^3 \not\equiv 1$ である．

これを使うと、$x = 1, 5, 9, 13$ に対しては，$3^{13} \equiv 3^9 \equiv 3^5 \equiv 3$ となり、これら以外の値に対しては，15 で割った余りが 3 以外となることが言える。(たとえば $3^{10} \equiv 3^6 \equiv 3^2$ となり，15 で割ると 9 余ることがわかる.)

以上より，$x = 1, 5, 9, 13$ である．

(3-d) $R_2 \circ R_2 = R_2$ が成立するかどうか，理由とともに答えよ．

答 (配点 5 点): 成立する．

まず，$x\ (R_2 \circ R_2)\ z$ と仮定する．定義より，$x\ R_2\ y$ かつ $y\ R_2\ z$ となる y が存在する．しかし，x の約数がすべて y の約数であり，y の約数がすべて z の約数であれば，x の約数はすべて z の約数であるので，$x\ R_2\ z$ が成立する．

逆に，$x\ R_2\ z$ と仮定する．$x\ R_2\ x$ が成立するので，$(x\ R_2\ x) \wedge (x\ R_2\ z)$ となり，$x\ (R_2 \circ R_2)\ z$ である．

以上より，R_2 は上記関係を満たす．

(3-e) R_1, R_2, R_3 の中に同値関係はあるか，理由とともに答えよ．

答 (配点 5 点): R_3 のみ同値関係である．

まず，R_1 は反射的でないので同値関係でない (反例: $1\ R_1\ 1$ が不成立).

R_2 は対称的でないので同値関係でない (反例: $1\ R_2\ 2$ は成立するのに，$2\ R_2\ 1$ が不成立).

R_3 は同値関係である．反射律，対称律は自明なので，推移律を示す．

$x\ R_3\ y$ かつ $y\ R_3\ z$ と仮定する．つまり，$3^x - 3^y$ が 15 で割り切れ $3^y - 3^z$ が 15 で割り切れる．すると，$3^x - 3^z = (3^x - 3^y) + (3^y - 3^z)$ となり，これも 15 で割り切れる．よって，$x\ R_3\ z$ が成立する．

補足: R_3 に対応する有向グラフを書いてみると、同値関係であることがより一層明確になる。(頂点集合が $\{1,5,9,13\}$, $\{2,6,10,14\}$, $\{3,7,11,15\}$, $\{4,8,12\}$ の 4 つのグループに分割され、それぞれのグループ内ではどの頂点からどの頂点へも辺があり、異なるグループ間の頂点の間には辺がない、というグラフになる。)

問 4

(4-a) 「((1(21))2)」は S の要素であるかどうか，理由を付けて答えよ．

答 (配点 4 点)：S の要素である．なぜなら，S の定義より，

「2」,「1」はそれぞれ S の要素である……（Base case）
「(21)」は S の要素である……（Induction step）
「(1(21))」は S の要素である……（Induction step）
「((1(21))2)」は S の要素である……（Induction step）

となるためである．

(4-b) $f_3((2(21)))$ を，定義に従って計算せよ．ただし計算の過程を明記すること．

答 (配点 4 点)：以下の通り．

$$\begin{aligned} f_3((2(21))) &= f_3(2) \oplus f_3((21)) \\ &= (\langle 2 \cdot 3 \rangle) \oplus (f_3(2) \oplus f_3(1)) \\ &= \langle 2 \cdot 3 \rangle \oplus (\langle 2 \cdot 3 \rangle \oplus \langle 1 \cdot 3 \rangle) \\ &= \langle 6 \rangle \oplus (\langle 6 \rangle \oplus \langle 3 \rangle) \\ &= \langle 6 \rangle \oplus (\langle 6, 3 \rangle) \\ &= \langle 6, 6, 3 \rangle \end{aligned}$$

なお，上記では $\oplus$ の計算は省略した。これで答案としては良いが、もし詳細に書くなら、以下のような計算となる。($\langle 6 \rangle = \mathrm{cons}(6, \langle\rangle)$ であることに注意せよ)。

$\langle 6 \rangle \oplus \langle 3 \rangle = \mathrm{cons}(6, \langle\rangle) \oplus \mathrm{cons}(3, \langle\rangle) = \mathrm{cons}(6, (\langle\rangle \oplus \mathrm{cons}(3, \langle\rangle))) = \mathrm{cons}(6, \mathrm{cons}(3, \langle\rangle)) = \langle 6, 3 \rangle$.

(4-c) $g(\mathrm{cons}(2, \mathrm{cons}(1, \mathrm{cons}(3, \langle\ \rangle))))$ を，定義に従って計算せよ．ただし計算の過程を明記すること．

答 (配点 4 点)：以下の通り．

$$
\begin{aligned}
g(\mathrm{cons}(2, \mathrm{cons}(1, \mathrm{cons}(3, \langle\ \rangle)))) &= g(\mathrm{cons}(1, \mathrm{cons}(3, \langle\ \rangle))) + 2 \\
&= g(\mathrm{cons}(3, \langle\ \rangle)) + 1 + 2 \\
&= g(\langle\ \rangle) + 3 + 1 + 2 \\
&= 0 + 3 + 1 + 2 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

(4-d) S の要素が与えられたとき，その中に「1」が出現する回数を対応付ける関数 one : $S \to \mathcal{N}$ を定義せよ．

答 (配点 4 点)：与えられた文字列の構成に従って,「1」が出現するたびに 1 を加えるような関数を定義すればよい．したがって解答は以下の通りである．

$$
\mathrm{one}(s) = \begin{cases} 1 & (\text{if } s = \text{「1」}) \\ 0 & (\text{if } s = \text{「2」}) \\ \mathrm{one}(t_1) + \mathrm{one}(t_2) & (\text{if } s = \text{「}(t_1 t_2)\text{」}) \end{cases}
$$

補足。右辺の条件では、引用符「。。。」で囲ったが、引用符を書かなくても減点はしない。

(4-e) 任意の $n \in \mathcal{N}$ と任意の $s \in S$ について，$g(f_n(s)) = (2n \cdot \mathrm{two}(s)) + (n \cdot \mathrm{one}(s))$ が成り立つことを証明せよ．

答 (配点 9 点)：$s \in S$ に関する帰納法により，$g(f_n(s)) = (2n \cdot \mathrm{two}(s)) + (n \cdot \mathrm{one}(s))$ が成り立つことを証明する．

(Base case 1: $s =$「1」のとき)
(左辺)$= g(f_n(1)) = g(\langle 1 \cdot n \rangle) = g(\langle n \rangle) = n$．また，(右辺)$= (2n \cdot \mathrm{two}(1)) + (n \cdot \mathrm{one}(1)) = 2n \cdot 0 + n \cdot 1 = 0 + n = n$．よって，$g(f_n(s)) = (2n \cdot \mathrm{two}(s)) + (n \cdot \mathrm{one}(s))$ が成り立つ．
(Base case 2: $s =$「2」のとき)
(左辺)$= g(f_n(2)) = g(\langle 2 \cdot n \rangle) = g(\langle 2n \rangle) = 2n$．また，(右辺)$= (2n \cdot \mathrm{two}(2)) + (n \cdot \mathrm{one}(2)) = 2n \cdot 1 + n \cdot 0 = 2n + 0 = 2n$．よって，$g(f_n(s)) = (2n \cdot \mathrm{two}(s)) + (n \cdot \mathrm{one}(s))$ が成り立つ．
(Induction step: $s = ((t_1 t_2))$ のとき)
(左辺)$= g(f_n((t_1 t_2))) = g(f_n(t_1) \oplus f_n(t_2)) = g(f_n(t_1)) + g(f_n(t_2))$ となるが，帰納法の仮定より，これは $(2n \cdot \mathrm{two}(t_1)) + (n \cdot \mathrm{one}(t_1)) + (2n \cdot \mathrm{two}(t_2)) + (n \cdot \mathrm{one}(t_2))$ と等しい．さらに，関数 one と two の定義より，$(2n \cdot \mathrm{two}((t_1 t_2))) + (n \cdot \mathrm{one}((t_1 t_2)))$ と等しい．ゆえに，$g(f_n(s)) = (2n \cdot \mathrm{two}(s)) + (n \cdot \mathrm{one}(s))$ が成り立つ．

以上より，任意の $n \in \mathcal{N}$ と任意の $s \in S$ について，$g(f_n(s)) = (2n \cdot \mathrm{two}(s)) + (n \cdot \mathrm{one}(s))$ が成り立つ．(証明終)