

# 『離散構造』 Short Quiz 略解

2017年12月15日(海野)

**問題 1** 自然数  $n \in \mathcal{N}$  を受け取って、自然数上のリスト  $\langle n, n-1, \dots, 1, 0 \rangle \in List_{\mathcal{N}}$  を返す関数  $f: \mathcal{N} \rightarrow List_{\mathcal{N}}$  を帰納的に定義しなさい。例えば  $f(3) = \langle 3, 2, 1, 0 \rangle$  である。

答. 以下のように帰納的に定義される。

$$f(n) = \begin{cases} \langle 0 \rangle & (n = 0) \\ \text{cons}(n, f(n')) & (n = n' + 1) \end{cases}$$

**問題 2** 自然数上のリストを受け取ってその長さを返す関数  $\text{length}: List_{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N}$  を以下で帰納的に定義する。

$$\text{length}(x) = \begin{cases} 0 & (x = \langle \rangle) \\ 1 + \text{length}(z) & (x = \text{cons}(y, z)) \end{cases}$$

このとき、 $\text{length}$  と問題 1 で定義した  $f$  について、 $\forall n \in \mathcal{N} (\text{length}(f(n)) = n + 1)$  が成り立つことを帰納法で証明しなさい。

答.  $n$  に関する帰納法で証明する。

- case  $n = 0$ :

$$\begin{aligned} \text{length}(f(0)) &= \text{length}(\langle 0 \rangle) && (f \text{ の定義による}) \\ &= 1 + \text{length}(\langle \rangle) && (\text{length の定義による}) \\ &= 1 && (\text{length の定義による}) \end{aligned}$$

- case  $n = n' + 1$ : 帰納法の仮定より、 $\text{length}(f(n')) = n' + 1$  である。

$$\begin{aligned} \text{length}(f(n' + 1)) &= \text{length}(\text{cons}(n' + 1, f(n'))) && (f \text{ の定義による}) \\ &= 1 + \text{length}(f(n')) && (\text{length の定義による}) \\ &= 1 + n' + 1 && (\text{帰納法の仮定による}) \\ &= n + 1 \end{aligned}$$