

## 『離散構造』 2章 関数の例題

### 例題 1 (関数と部分関数の定義)

$\mathcal{R}$  を実数の集合とする。次の対応は、 $\mathcal{R}$  から  $\mathcal{R}$  への関数 (写像) であるか答えよ。関数でないものは、 $\mathcal{R}$  から  $\mathcal{R}$  への部分関数であるか答えよ。

- $x \in \mathcal{R}$  に対して、 $xy = 0$  となる  $y$  を対応付ける対応関係。
- $x \in \mathcal{R}$  に対して、 $xy = 10$  となる  $y$  を対応付ける対応関係。
- $x \in \mathcal{R}$  に対して、 $(xy = 10) \vee (x = y = 0)$  となる  $y$  を対応付ける対応関係。

### 例題 2 (関数の像, 逆像, 合成)

$f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  および  $g: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  となる関数  $f$  と  $g$  を  $f(x) = x^2 + x - 1$ ,  $g(x) = x^3 + 1$  で定義する。また、 $\mathcal{R}^+ = \{x \in \mathcal{R} \mid x \geq 0\}$  とする。

- $f$  による  $\mathcal{R}^+$  の像と、 $\mathcal{R}^+$  の逆像を求めよ。
- $g$  による  $\mathcal{R}^+$  の像と、 $\mathcal{R}^+$  の逆像を求めよ。
- 合成関数  $f \circ g$  と  $g \circ f$  を求めよ。

### 例題 3 (全射, 単射, 逆関数, 合成)

集合  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  に対して、関数  $f: A \rightarrow A$  を  $f(x) = (x + 3) \bmod 7$  で定義し、関数  $g: A \rightarrow A$  を  $g(x) = (x * 3) \bmod 7$  で定義する。ただし、 $\bmod$  は、整数同士の割り算による余りとする。(C 言語の % 演算子)。

- 関数  $f$  は全射か、また、単射か。
- 関数  $g$  は全射か、また、単射か。
- 関数  $f$  と  $g$  の逆関数は存在するか、また、存在する場合、それはどういう関数か？
- 関数  $f$  と  $g$  の 2 通りの合成  $f \circ g$  と  $g \circ f$  を求めよ。

### 例題 4 (関数に関する証明)

$f: A \rightarrow B$  と  $g: B \rightarrow C$  がいずれも単射であるとき、 $g \circ f$  も単射であることを示せ。