

主専攻実験  
数理モデリングとアルゴリズム

## 課題4：熱伝導シミュレーション

### 1 はじめに

本実験では土蔵が火に包まれたときのシミュレーションを行い、内部の温度変化を調べる。熱伝導シミュレーションは、PCの発熱問題や新素材の開発などの分野において重要となる。そのようなシミュレーションでは偏微分方程式を求解する必要がある。本実験では偏微分方程式を差分近似で解く方法と Matlab の関数を用いて解く方法を行い、温度変化のシミュレーションを行う。

### 2 実験課題4-1：差分近似による偏微分方程式の求解

土蔵が火に包まれたときの内部の温度変化のシミュレーションを行い、内部の温度の変化を調べよ。火に包まれてから1時間後  $t = 3600(\text{sec})$  での土堀内部の温度分布を計算せよ。また、時間ごとの土堀内部の温度変化を調べよ。

#### 2.1 モデリング

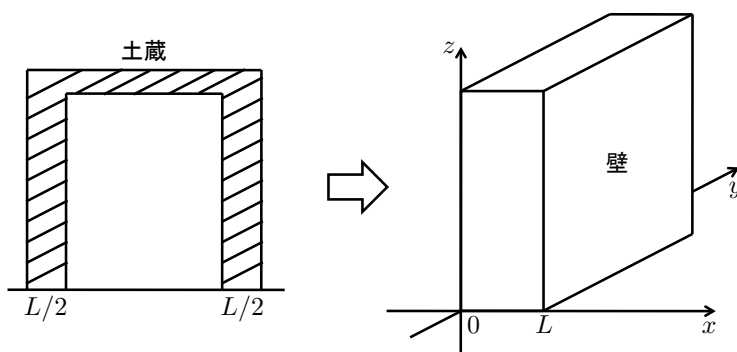


図 1: 土蔵のモデリング

本実験課題ではモデルを単純化し、壁が無限に広いと仮定する。これにより内部の温度は壁の厚さ方向でのみ変化し、それ以外の方向では均一とみなすことができる。また内部の空間の影響はないものとして壁だけの問題とし、厚さ  $L/2$  の壁が合わさった厚さ  $L$  の壁の中心温度を土蔵の内部温度とみなすことにする(図1)。このようなモデルにすることで、図2に示すような側面が断熱された長さ  $L$  の棒の温度の問題となる。そのため、本実験課題では図2のモデルの問題について考える。

$x$  方向に延びた、側面が断熱された長さ  $L$  の棒の温度を  $u(t, x)$  とする。このとき、 $u(t, x)$  は、以下の偏微分方程式に従う。

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \quad (t \geq 0, 0 < x < L).$$

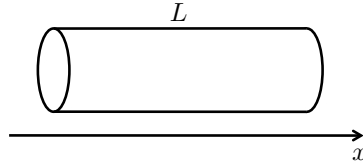


図 2: 側面が断熱された棒

ここで,

$$\alpha = \frac{\kappa}{c\rho},$$

$\kappa$ : 熱伝導率,  $c$ : 比熱,  $\rho$ : 密度である. 本実験では土蔵の温度変化を調べるため, 熱伝導率は  $\kappa = 0.14 \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , 比熱は  $c = 0.8 \times 10^3 \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ , 密度は  $\rho = 2 \times 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$  とする.

## 2.2 初期値境界値条件

時刻  $t = 0$  での温度 (初期値) を

$$u(0, x) = f(x) \quad (0 \leq x \leq L)$$

とし, 両端の温度 (境界値)

$$u(t, 0) = g_0(t), \quad u(t, L) = g_L(t) \quad (0 \leq x \leq L)$$

とする.

本実験では  $L = 1(\text{m})$  とし, 時間  $t = 0(\text{sec})$  から両側面の温度を  $1000 \text{ }^\circ\text{C}$  とする. そのため,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < L) \\ 1000 & (x = 0, L) \end{cases}, \quad g_0(t) = 1000, \quad g_L(t) = 1000$$

となる.

## 2.3 偏微分方程式の求解

棒の  $x$  方向を  $n$  等分して空間刻み幅を  $h = L/n$  とし,  $x_i = ih$  ( $0 \leq i \leq n$ ) とする. 時刻については時間刻み幅を  $d(> 0)$  とし, 時刻  $t_k = kd$  における点  $x_i$  における温度を  $u_i^{(k)} = u(t_k, x_i)$  ( $k \geq 0, 0 \leq i \leq n$ ) とする. 本実験では時間刻み幅  $d = 10(\text{sec})$ , 棒を  $n = 100$  等分する.

偏微分方程式を差分によって近似する. 時間に関して差分近似は,

$$\frac{\partial}{\partial t} u \left( t_k + \frac{d}{2}, x_i \right) \approx \frac{1}{d} \left( u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)} \right) \quad (1)$$

とする. 空間に関する差分近似は

$$\frac{\partial}{\partial x} u \left( t_k, x_i + \frac{h}{2} \right) \approx \frac{1}{h} \left( u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x} u \left( t_k, x_i - \frac{h}{2} \right) \approx \frac{1}{h} \left( u_i^{(k)} - u_{i-1}^{(k)} \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_i^{(k)} \approx \frac{1}{h} \left( \frac{\partial}{\partial x} u \left( t_k, x_i + \frac{h}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} u \left( t_k, x_i - \frac{h}{2} \right) \right) \approx \frac{1}{h^2} \left( u_{i+1}^{(k)} - 2u_i^{(k)} + u_{i-1}^{(k)} \right)$$

とし,  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_i^{(k)}$  と  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_i^{(k+1)}$  の平均で  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u \left( t_k + \frac{d}{2}, x_i \right)$  を近似すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \left( t_k + \frac{d}{2}, x_i \right) &\approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_i^{(k)} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_i^{(k+1)} \right) \\ &\approx \frac{1}{2h^2} \left\{ \left( u_{i+1}^{(k)} - 2u_i^{(k)} + u_{i-1}^{(k)} \right) + \left( u_{i+1}^{(k+1)} - 2u_i^{(k+1)} + u_{i-1}^{(k+1)} \right) \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

となる.

式 (1), (2) を偏微分方程式に代入し, 関数値を時間で分類して左辺と右辺に振り分けると, 以下のクランク-ニコルソン (Crank-Nicolson) 公式を得る.

$$-u_{i+1}^{(k+1)} + \left( \frac{2h^2}{d\alpha} + 2 \right) u_i^{(k+1)} - u_{i-1}^{(k+1)} = u_{i+1}^{(k)} + \left( \frac{2h^2}{d\alpha} - 2 \right) u_i^{(k)} + u_{i-1}^{(k)} \quad (1 \leq i \leq n-1) \quad (3)$$

式 (3) を行列形式で表すと,

$$\begin{pmatrix} a & -1 & & & 0 \\ -1 & a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a & -1 \\ 0 & & & -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(k+1)} \\ u_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ u_{n-2}^{(k+1)} \\ u_{n-1}^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + u_0^{(k+1)} \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} + u_n^{(k+1)} \end{pmatrix} \quad (4)$$

となる. ここで,  $a = \frac{2h^2}{d\alpha} + 2$ ,  $b_i = u_{i+1}^{(k)} + \left( \frac{2h^2}{d\alpha} - 2 \right) u_i^{(k)} + u_{i-1}^{(k)}$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) である.

式 (4) において, 時刻  $t_k$  における温度  $u_i^{(k)}$  の値が既知の時, 右辺の値は求めることができる. 従って式 (4) の線形方程式を解くことで時刻  $t_{k+1}$  における温度  $u_i^{(k+1)}$  を求めることができる.

### 3 実験課題 4-2 : MATLAB の関数を用いた偏微分方程式の求解

前章と同様に土蔵が火に包まれたときの内部の温度変化のシミュレーションを行い, 内部の温度の変化を調べる. 本実験ではモデリングと初期値境界値条件は前章と同様のものを用い, 偏微分方程式の求解には MATLAB の関数を用いる.

#### 3.1 偏微分方程式の求解

偏微分方程式は Matlab の関数である `pdepe` を利用する事で求めることができる. 以下のように入力する.

```
sol = pdepe(m,pdefun,icfun,bcfun,xmesh,tspan)
```

入力引数について, `m` は問題の対称性に対応したパラメーターであり, 本実験では `m=0` とする. `pdefun` には以下の式の係数  $c, f, s$  を求める関数ハンドルを与える.

$$c \left( x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^m f \left( x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + s \left( x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

icfun には初期条件  $u_i^0$  を返す関数を与える．bcfun には境界条件を定義した関数ハンドルを与える．xmesh にはメッシュ状の空間を与える．本実験では前章の  $x_i$  ( $0 \leq i \leq L$ ) を与える．tspan には測定する時間を与える．本実験では前章の  $t_k$  ( $0 \leq k$ ) を与える．

出力引数 sol には,  $u_i^{(k)}$  ( $0 \leq i \leq L, 0 \leq k$ ) が出力される．

関数の詳細については以下の HP に記載されている．

<http://www.mathworks.co.jp/jp/help/matlab/ref/pdepe.html>

## 4 実験課題 4-3：応用課題

前章までは土蔵に対する内部の温度変化を調べた．本章ではそれらの実験を応用して，熱伝導率や比熱，密度が異なる物質の温度変化を調べよ．また時間刻み幅や空間刻み幅を変化させ，それによる温度変化を調べよ．