主専攻実験
数理モデリングとアルゴリズム

課題5：シンセサイザーシミュレーション

1 はじめに

本実験では音の波形や波形の減衰を組み合わせてシンセサイザーのシミュレーションを行う．周期性のある音の波形はフーリエ級数によって sin 関数の和で生成する事が可能となる．MATLAB を用いて，sin 関数の和による音の波形の生成を行い，音声信号をスピーカーに送る．さらに，そのプログラムを応用し様々な楽器の音を生成する．

2 音の生成

2.1 正弦波による音の生成

対象とする音の周波数を f(Hz) とし，振幅を a，初期位相を ϕ とする．このとき，時刻 t に対する正弦波によって表される音は純音と呼ばれ，以下の式によって表される．

$$y = a\sin(2\pi ft + \phi)$$

MATLAB の関数を用いて波形を音声信号としてスピーカーに送ることができる．以下のように入力する．

```
sound(y,Fs)
```

入力引数について，`y` には音声信号を与える．`Fs` にはサンプリングレートを与える．`Fs` の値については，標本化定理より波形 `y` の周波数の 2 倍以上の値を与える必要がある．

関数の詳細は以下の HP に記載されている．

`http://www.mathworks.co.jp/jp/help/matlab/ref/sound.html`

2.2 正弦波の合成による音の生成

シンセサイザーのシミュレーションを行う際，三角波や矩形波などの基本波形を生成する必要がある．基本波形を生成することで音色を変えることができる．例としてピアノの音の波はのこぎり波に近い波で構成されており，クラリネットの音の波は矩形波に近い波で構成されている．これらの波形は，フーリエ級数から正弦波の合成によって生成することができる．

例として三角波をフーリエ級数で表すと以下の式となる．

$$y = \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{1}\sin(2\pi ft) - \frac{1}{9}\sin(6\pi ft) + \frac{1}{25}\sin(10\pi ft) - \cdots\right) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{K}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\left(2\pi(2k+1)ft\right)$$

この式は，基準音 $\sin(2\pi ft)$ と基準音の周波数の整数倍の周波数音（倍音）の合成によって生成されている．

2.3 スペクトル解析

ある音にどの周波数がどの程度含まれているかを示す尺度（スペクトル）を求めることをスペクトル解析と呼ぶ．スペクトル解析は離散フーリエ変換によって求めることができ，スペクトル解析によってある音がどのような周波数で構成されているかを調べることができる．

離散フーリエ変換は MATLAB の関数を用いることで求めることができる．以下のように入力する．

```
Y = fft(x,n)
```

入力引数について，x には波形を与える．波形データ x は全体の波形データの中から数十周期分のデータを抽出したものを与える．n には離散フーリエ変換を行う点の数を与える．

出力引数について，Y には離散フーリエ変換の値が返される．

関数の詳細は以下の HP に記載されている．

http://www.mathworks.co.jp/jp/help/matlab/ref/fft.html

例として，440Hz の正弦波に対してスペクトル解析を行うと，図 2 のようなスペクトルとなる．横軸は周波数，縦軸は音に含まれている度合いを示している．図 2 を見ると 440Hz で高い値，それ以外は低い値をとっており，このことからスペクトル解析によって 440Hz の周波数が検出されたことが分かる．

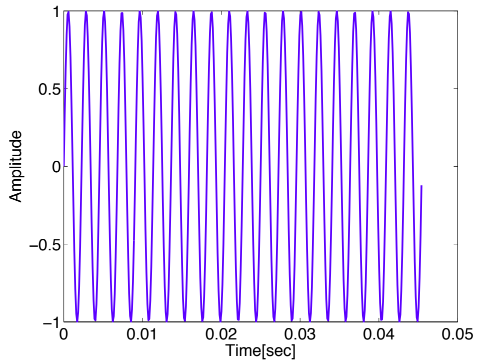

図 1: 440(Hz) の正弦波（20 周期分を抽出）

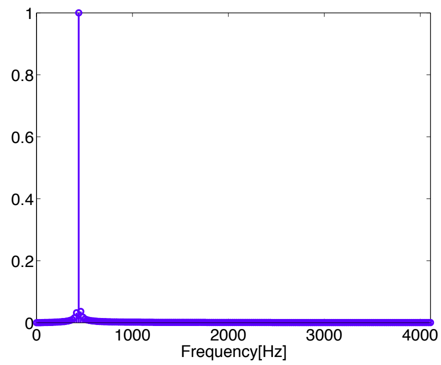

図 2: スペクトル解析の結果

2.4 エンベロープを含めた音の生成

ピアノやバイオリンの音を生成する場合，音のはじめは振動が大きく時間が経つと振幅が小さくなる．このように時間の経過によって振幅 $a(t)$ を変化させることで，より楽器に近い音を生成することができる．このような振幅の時間変化のことをエンベロープ（包括線）と呼ぶ．純音にエンベロープを加えると以下の式となる．

$$y = a(t)\sin(2\pi ft + \phi)$$

例として，ピアノの音の波形は図 3 のようになる．横軸は時間，縦軸は振幅である．ピアノの波形は図 3 のように最初振幅が大きく，その後すぐに振幅が減衰する．

エンベロープは図 4 のような要素で構成されている．横軸は時間，縦軸はエンベロープである．音は最初，出始めてから最高音量（Attack Level）まで到達する．ここまでの時間が Attack

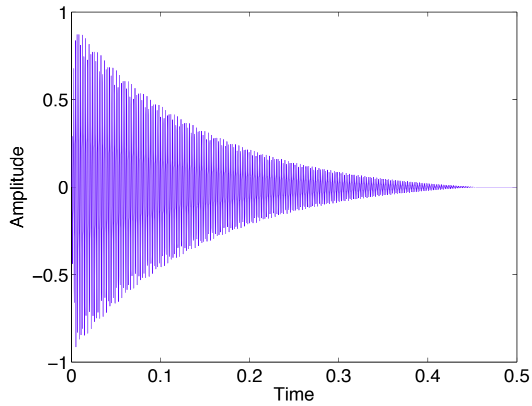

図 3: ピアノの波形変動

Time となる．次に音は少し減衰する．この時にかかる時間が Decay Time となる．そして減衰が止まった時の音量（Sustain Level）のまま音が流れ続ける．この時にかかる時間が Sustain Time となる．最後に音が消える時にかかる時間が Release Time となる．

ピアノの音の波形は Attack Time が短く Sustain Level が小さいエンベロープとなり，クラリネットやフルートなどは最大音量に近い値が出力され続けるため Sustain Level が高いエンベロープとなる．

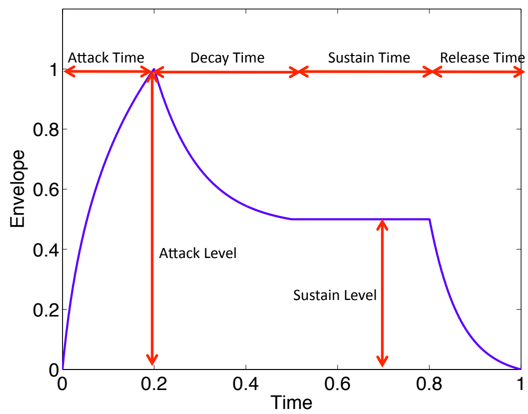

図 4: エンベロープの構成

3　実験課題

3.1　課題 5-1

音の波形を正弦波により生成し，振幅や周波数を変化させ音を再生せよ．また様々な周波数の純音を重ねあわせ，音を再生せよ．以下に Matlab のサンプルコードを示す．

ソースコード 1: 440Hz の純音（ソの音）の再生

```
time = 1;    %音を再生する時間
```

```
Fs = 8192;  %サンプリングレート
a = 1;      %振幅
phi = 0;    %初期位相
f = 440;    %周波数

t=(1:round(Fs*time))/Fs;
y=a*sin(2*pi*f*t+phi);
sound(y,Fs);
```

3.2 課題 5-2

三角波，矩形波，のこぎり波のフーリエ級数から波形データを生成し，その音を再生せよ．また K を変化させて波形データを生成し，その音を再生せよ．矩形波とノコギリ波の波形データを以下に示す．

矩形波

$$y = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{K} \frac{1}{(2k-1)} \sin\left(2\pi(2k-1)ft\right)$$

のこぎり波

$$y = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{K} \frac{(-1)^k}{k+1} \sin\left(2\pi(k+1)ft\right)$$

3.3 課題 5-3

三角波，矩形波，のこぎり波に対してスペクトル解析を行い，それぞれのスペクトルがどのようになっているのか調べよ．また，ある周波数の波形にノイズ（乱数）を加えてスペクトル解析を行うとスペクトルがどのようになるのか調べよ．スペクトル解析を行う波形データは全体の波形データ中から数十周期分を取り出したデータとすること．

3.4 課題 5-4

ピアノやバイオリンなどの弦楽器の音の波はのこぎり波に近い波で構成されており，クラリネットやラッパなどの管楽器は矩形波に近い波で構成されている．のこぎり波にエンベロープを加えピアノやバイオリンに近い音を再生させよ．また，矩形波にエンベロープを加え，クラリネットやラッパに近い音を再生させよ．

3.5 課題 5-5

周波数や基本波，エンベロープを変化させ自分で選んだ楽器の音に近い音を作成し，その波形グラフ，およびスペクトル解析したグラフを示せ．