

主専攻実験
数理モデリングとアルゴリズム

課題3：力学シミュレーション

1 はじめに

本実験では人工衛星の飛行に用いられるスイングバイをシミュレーションし、それによる人工衛星の軌道や速度の変化を調査する。スイングバイとは、天体の万有引力を利用して人工衛星の運動方向を変更させる技術である。これにより、人工衛星の燃料の消費を抑えて、速度や軌道を変化させることが可能となる。本実験では木星を利用したスイングバイのシミュレーションを行う。スイングバイのシミュレーションには常微分方程式の求解が必要となる。

2 実験課題 3-1：静止した重力場に対するスイングバイ

静止した重力場に対して、人工衛星を近づけたときの軌道と速度がどのように変化するかを調べよ。本実験課題では他の惑星の引力は無視する。また2次元平面上での運動を考えるものとする。

2.1 モデリング

時刻 t における人工衛星の位置座標を (x, y) とし、 x 軸方向、 y 軸方向の速度をそれぞれ v_x, v_y としたとき、以下の常微分方程式を満たす。この常微分方程式を求解することで人工衛星の位置と速度を求めることができる。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GMx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{GM y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y.$$

ここで、 G は万有引力定数、 M は重力場の質量を表しており、本実験課題では重力場を木星と考える。万有引力定数は $G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}^2$ であり、木星は赤道半径 $R_j = 71398 \text{ km}$ 、地球と木星の質量比は 317.8 である。地球の質量は $5.974 \times 10^{24} \text{ kg}$ であるため、

$$GM = 1.267 \times 10^8 \text{ km}^3/\text{s}^2$$

となる。

2.2 初期条件の設定

常微分方程式の初期条件は、

$$\begin{cases} x = x_0, & y = y_0 \\ v_x = v_0 \cos(\theta_0), & v_y = v_0 \sin(\theta_0) \end{cases}$$

のように与える。

本実験課題では、図1に示すように、木星の位置を xy 平面上の原点とし、人工衛星の初期速度 $v_0 = 14 \text{ km/s}$ 、初期角度 $\theta_0 = \pi/3$ 、初期位置 $y_0 = -30R_j \text{ km}$ に固定し、 x_0 を変動させることで、人工衛星の軌跡と速度の変化を調べる。

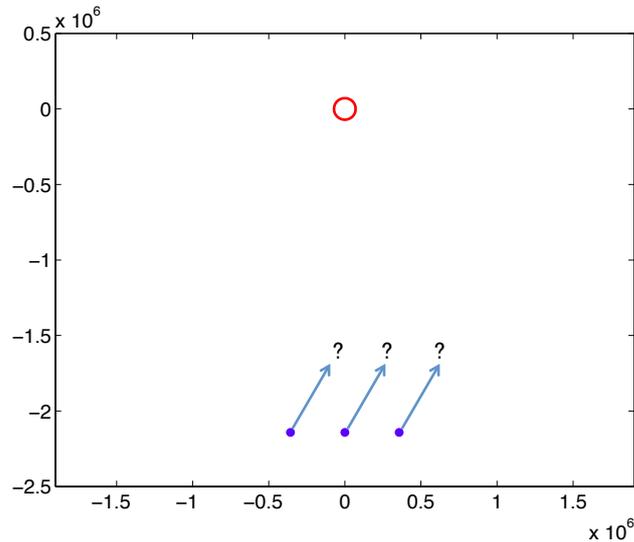


図 1: 人工衛星の軌道

2.3 常微分方程式の求解

常微分方程式は Matlab の関数である `ode45` を利用することで求めることができる。以下のように入力する。

$$[T,Y] = \text{ode45}(\text{odefun},\text{tspan},\text{y0},\text{options})$$

入力引数について、`odefun` には解くべき微分方程式を与える。 $dx/dt = f(t,x)$ の形式の関数 f を作成し、その関数ハンドルを渡す。関数 f は前々節の微分方程式を記入する。

`tspan` には積分区間を与える。本実験課題では `linspace(0,360000,100)` を与える。そうすることで、0 秒から 360000 秒 (= 100 時間) の間の 100 個の等間隔の時間での解を求めることができる。

`y0` には初期条件を与える。前節の初期条件を与える。

出力引数について、`T` には指定した積分区間内の値が出力される。本実験課題では `tspan` と同じ値が出力される。

`Y` には `T` で出力された時間での微分方程式の解が出力される。

関数の詳細は以下の HP に記載されている。

<http://www.mathworks.co.jp/jp/help/matlab/ref/ode23.html>

2.4 オプション：アニメーション

前節で述べた微分方程式の求解により、人工衛星の軌道と速度は計算できる。それらの結果に対して、以下の関数を実行する事によってアニメーションが作成される。関数の引数について、`T` には前節の `tspan` を与える。`x,y,vx,vy` には、常微分方程式の計算結果である人工衛星の位置座標 (x,y) と速度 v_x,v_y をそれぞれ与える。`Vj` には木星の移動速度を与える。本実験課題では 0 でよい。

ソースコード 1: スイングバイのアニメーション

```

1 function swing_movie(T,x,y,vx,vy,Vj)
2
3 Rj = 71398;
4 Vel =sqrt(vx.^2+vy.^2);
5 My=-T*Vj;
6
7 tt=(0:32)*2*pi/32;
8 j = 1;
9
10 set(0,'defaultAxesFontSize',14);
11 hfig = figure();
12 set(hfig,'Color',[1 1 1])
13
14 subplot(2,1,1);
15 cir=My(j)+Rj*(cos(tt)+sqrt(-1)*sin(tt));
16 plot_j=plot(real(cir),imag(cir),'r');
17 hold on;
18 plot_sp=plot(x(1:j),y(1:j),'.-');
19 xlim([min([x;0]) max([x;0])]);
20 ylim([min([y;0]) max([y;0])]);
21 title('Trajectory')
22 hold off;
23
24 subplot(2,1,2);
25 plot_v=plot(1:j,Vel(1:j),'-');
26 hold on;
27 xlim([0 length(T)+1]);
28 ylim([min(Vel)-2 max(Vel)+2]);
29 xlabel('Time');          ylabel('Velocity');
30 hold off;
31
32 F(j) = getframe(hfig);
33
34 for j = 2:length(T)
35     cir=My(j)+Rj*(cos(tt)+sqrt(-1)*sin(tt));
36     set(plot_sp,'XData',x(1:j),'YData',y(1:j));
37     set(plot_j,'XData',real(cir),'YData',imag(cir));
38     set(plot_v,'XData',1:j,'YData',Vel(1:j));
39     F(j) = getframe(hfig);
40 end
41
42 save mov1 F

```

3 実験課題 3-2：公転する惑星に対するスイングバイ

前章では静止した重力場（木星）に対してスイングバイを行った。しかし実際の木星は太陽を中心に公転を行っている。本実験課題では公転する惑星に対して、人工衛星を近づけた際に軌道と速度がどのように変化するかを調べる。前実験と同様、他の惑星の引力は無視する。

3.1 モデリング

前章では静止した重力場であったため、木星の公転は考慮されていなかった。本節では木星の公転を考慮したモデリングを行う。木星は太陽からの最大距離が 8.160×10^8 km、最小距離が 7.406×10^8 km の楕円軌道上を平均速度 $V_J = 13.06$ km/s で公転している。本実験課題では、木星の動きは xy 平面上の $-x$ 軸方向に等速直線運動をしているものとする。このとき、以下の常微分方程式を満たす。この常微分方程式を解くことで人工衛星の位置と速度を求めることができる。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM(x + tV_J)}{((x + tV_J)^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{GM y}{((x + tV_J)^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y.$$

微分方程式の求解には前章と同様 `ode45` が利用できる。

3.2 初期条件の設定

常微分方程式の初期条件は前章と同様、 x_0 を変動させることで人工衛星の軌跡と速度の変化を調べる。木星の位置は図 2 に示すように、初期位置を xy 平面上の原点とし、 $-x$ 軸方向に平均速度 $V_J = 13.06$ km/s で等速直線運動をしているものとする。また、得られた結果によるアニメーションの作成については前章のプログラムを利用することが可能である。

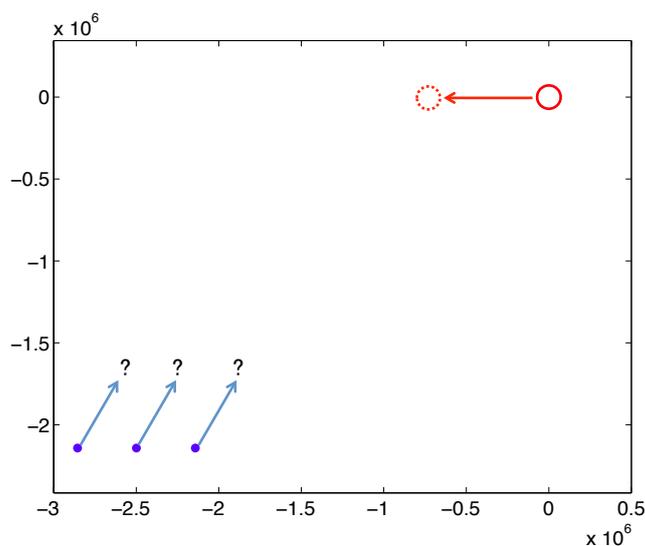


図 2: 木星と人工衛星の軌道

4 実験課題 3-3：応用課題

前章までは木星に対してスイングバイのシミュレーションを行った。本章ではそれらの実験を応用して、他惑星でのスイングバイの実験や、 x 軸以外のパラメータを変更し、それによる人工衛星の軌道や速度の変化を調べよ。