平成３１年度

筑波大学大学院博士課程
システム情報工学研究科
コンピュータサイエンス専攻

博士前期課程（一般入学試験　２月期）
試験問題　基礎科目（数学，情報基礎）
Mathematics／Fundamentals of Computer Science

[注意事項][Instructions]

1. 試験開始の合図があるまで，問題の中を見てはいけません．また，筆記用具を手に持ってはいけません．
   Do NOT open this booklet before the examination starts. In addition, do not have a pen in hand before the examination starts.
2. 解答用紙（罫線有り）を 3 枚，下書き用紙（白紙）を 1 枚配布します．
   You are given three answer sheets (ruled paper) and one draft sheet (blank paper).
3. <u>試験開始の合図のあとで</u>，全ての解答用紙の定められた欄に，研究科，専攻，受験番号を記入すること．
   Fill in the designated spaces on each answer sheet with the name of the graduate school, the name of main field (department), and your examinee number <u>after the examination starts.</u>
4. この問題は全部で 15 ページ（表紙を除く）です．1～7 ページは日本語版，9～15 ページは英語版です．
   This booklet consists of 15 pages, excluding the cover sheet. The Japanese version is shown on pages 1–7 and the English version on pages 9–15.
5. 問題は全部で 5 問あります．このうち，3 問選択すること．問題ごとに解答用紙を分けて記入すること．
   There are five problems. Select three problems. Write your answer to each problem in a different answer sheet.
6. 解答用紙に解答を記述する際に，問題番号を必ず明記すること．
   When writing the answers, clearly label the problem number on each answer sheet.

平成３１年１月３１日

問題 I の解答に使用する解答用紙の先頭には「問題 I」と明記すること．この解答用紙には問題 I に対する解答以外を記述しないこと．

問題 I　次のベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4$ に関して，以下の問いに答えなさい．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4$ で生成されるベクトル空間 V の次元を求めなさい．

(2) ベクトル空間 V の基底を一つ求めなさい．基底であることを証明すること．

(3) ベクトル空間 V の直交基底を一つ求めなさい．

問題 II の解答に使用する解答用紙の先頭には「問題 II」と明記すること．この解答用紙には問題 II に対する解答以外を記述しないこと．

問題 II

(1) 曲線 $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ $(x \geq 0, y \geq 0)$ に対して，その曲線上の点 (a, b) $(a > 0, b > 0)$ で接する接線 L を考え，接線 L が x 軸, y 軸と交わる点を各々P, Q とする．以下の問い (1-1), (1-2) に答えなさい．

(1-1) 接線 L の式を求めなさい．

(1-2) 線分 PQ の長さは接点 (a, b) によらず 1 であることを証明しなさい．

(2) 領域 D を $D = \{(x, y) | \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x + y \leq 1\}$ と定義するとき，次の 2 重積分 I を求めなさい．

$$I = \iint_D xy \ dxdy$$

問題 III の解答に使用する解答用紙の先頭には「問題 III」と明記すること．この解答用紙には問題 III に対する解答以外を記述しないこと．

問題 III

(1) $\mathbb{Z}$ を整数の集合とし，関数 $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を以下のように定義する．

$$f(x, y, z) = \begin{cases} y & (x \leq y) \\ f(f(x-1, y, z), f(y-1, z, x), f(z-1, x, y)) & (x > y) \end{cases}$$

また，関数 $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を $g(x) = f(x+1, x, x+2)$ と定義する．このとき以下の問いに答えなさい．

(1-1) $f(2, 1, 3)$ の値を求めなさい．計算過程も示すこと．

(1-2) 関数 g が全単射であることを証明しなさい．

(1-3) すべての $x \in \mathbb{Z}$ について $f(x+2, x+1, x) = x+2$ であることを証明しなさい．

(2) $\mathbb{N}$ を（0 を含む）自然数の集合とし，$\mathbb{N}$ 上の二項関係 R を以下のように定義する．

$$R = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \bmod 2 = y \bmod 2 \wedge x \bmod 3 = y \bmod 3\}$$

ここで $a \bmod b$ は自然数 a を自然数 $b \neq 0$ で割った余りを表すものとする．このとき以下の問いに答えなさい．

(2-1) 二項関係の反射律・対称律・推移律を表す述語論理式をそれぞれ記述し，関係 R がそれらをすべて満たすことを証明しなさい．

(2-2) 合成関係 $R \circ R$ が反対称律を満たさないことを反例を挙げて示しなさい．

(2-3) 自然数 a の同値関係 R による同値類 $\{x \in \mathbb{N} \mid a \ R \ x\}$ を $[a]$ と表す．$[3] \cap [5] = \emptyset$ であることを証明しなさい．

問題 IV の解答に使用する解答用紙の先頭には「問題 IV」と明記すること．この解答用紙には問題 IV に対する解答以外を記述しないこと．

問題 IV　N 個の頂点の集合 V と，M 本の辺の集合 E からなる無向グラフ $G = (V, E)$ を考える．ここで，任意の 2 頂点間における辺の数は高々 1 本であるとし，両端が同じ頂点となる辺は存在しないものとする．

この無向グラフ G は，隣接行列と呼ばれる N 次正方行列で表すことができる．この行列の i 行 j 列の要素を $a_{i,j}$ とする．頂点 $v_i, v_j \in V$ $(0 \leq i \leq N-1,\ 0 \leq j \leq N-1)$ の間に辺があるときは，$a_{i,j} = a_{j,i} = 1$，無いときは $a_{i,j} = a_{j,i} = 0$ とする．

図 1 は，以下の隣接行列 A によって表される無向グラフにおいて，異なる 2 頂点間の全ての経路を探すための C 言語のプログラムである．ここで，経路は，同じ頂点を 2 度以上通ることがないものとする．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 隣接行列 A によって表される無向グラフを図で描きなさい．

(2) 関数 `traverse` は，引数 `start` で指定された頂点を始点とし，引数 `goal` で指定された頂点を終点とする全ての経路を標準出力に出力する．配列 `path` には，探索途中の経路に現れる頂点の添字が始点から順に格納されている．また，配列 `visited` は，それぞれの頂点が始点から探索途中の頂点までの経路に現れているかを表している．関数 `traverse` から呼び出される関数 `dfs` は，深さ優先探索により経路を探索する．引数 `step` は，始点から現在探索している頂点までの経路上の辺の数を表している．図 1 の空欄 (a)～(e) を埋めてプログラムを完成させなさい．

(3) 図 1 のプログラムを実行したときに，標準出力に出力される結果を答えなさい．

(4) 図 1 のプログラムを実行したときに，関数 `dfs` が呼び出される回数を答えなさい．

(5) 疎な無向グラフ（辺の数が少ない無向グラフ）を対象とする場合，図 1 のプログラムを修正することにより，時間計算量を削減することができる．その修正の概要を説明しなさい．また，修正によって時間計算量が削減される理由を説明しなさい．

```
#include <stdio.h>
#include <stdbool.h>
#define N 7

const int a[N][N] = {
    {0, 1, 1, 0, 0, 0, 0},
    {1, 0, 1, 1, 0, 0, 0},
    {1, 1, 0, 0, 1, 0, 0},
    {0, 1, 0, 0, 1, 1, 0},
    {0, 0, 1, 1, 0, 0, 1},
    {0, 0, 0, 1, 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, 0, 1, 0, 0},
};


void print_path(int n, int path[])
{
    for (int i = 0; i < n; i++)
        printf("%d ", path[i]);
    printf("\n");
}


void dfs(int step, int goal, int path[], bool visited[])
{
    int x = path[step - 1];
    if (x == goal) {
        print_path(step, path);
    } else {
        for (int i = 0; i < N; i++) {
            if (a[x][i] == 0) continue;
            if (!visited[i]) {
                path[ (a) ] = i;
                visited[i] = (b) ;
                dfs( (c) , (d) , path, visited);
                visited[i] = (e) ;
            }
        }
    }
}

void traverse(int start, int goal)
{
    int path[N];
    bool visited[N];

    for (int i = 0; i < N; i++) visited[i] = false;
    path[0] = start;
    visited[start] = true;
    dfs(1, goal, path, visited);
}

int main(void)
{
    traverse(0, 6);
    return 0;
}
```

図 1: 無向グラフの経路を探す C 言語のプログラム

問題Ｖの解答に使用する解答用紙の先頭には「問題Ｖ」と明記すること．この解答用紙には問題Ｖに対する解答以外を記述しないこと．

問題 V　図 1 の論理ゲートを使って表された図 2 の論理回路に関して，以下の設問に答えなさい．

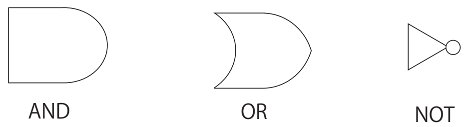

図 1: 論理ゲート

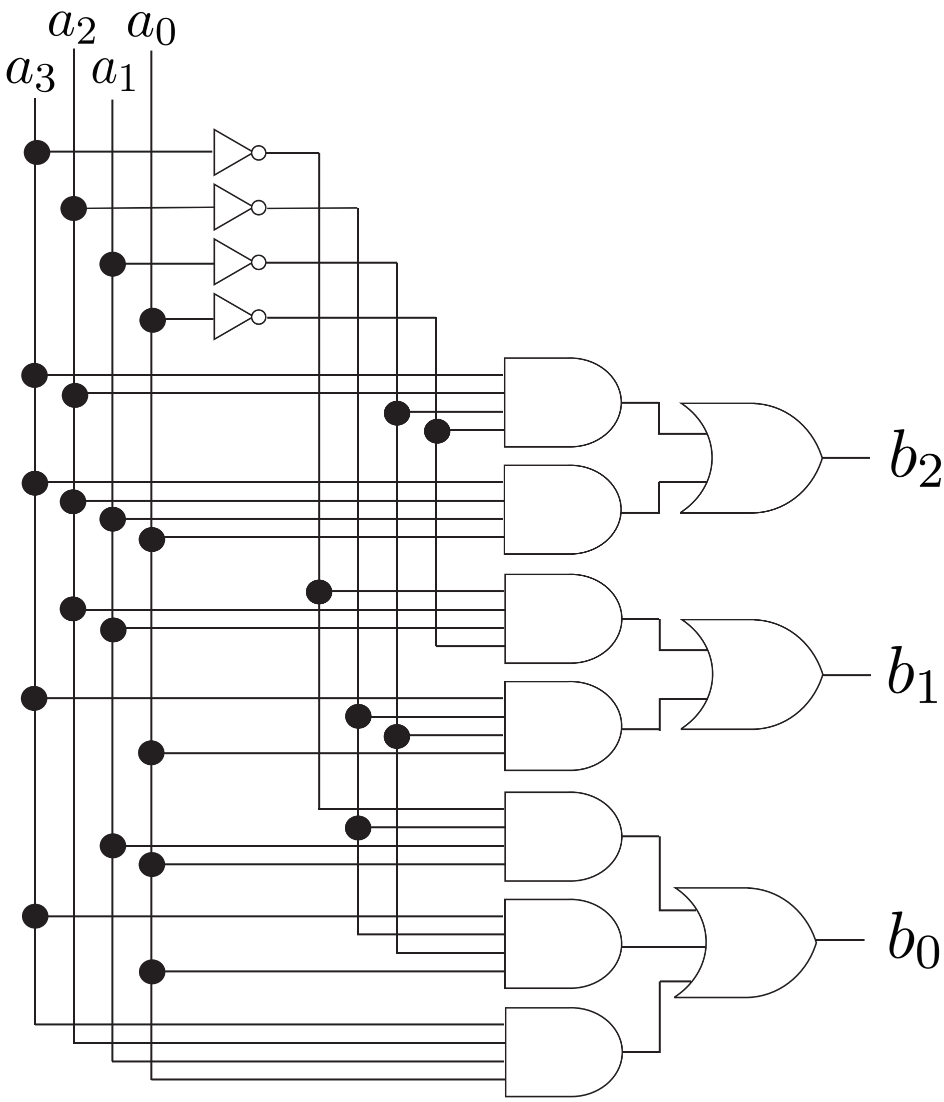

図 2: 回路図

(1) 出力 b_2，b_1，b_0 のそれぞれを表す論理式を，入力 a_3，a_2，a_1，a_0 を用いて示しなさい．

(2) 図 2 の論理回路の入出力の関係を，真理値表を用いて示しなさい．

(3) b_2 に関して，以下のカルノー図を完成させなさい．

a_3a_2 \ a_1a_0	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

(4) b_2 を，論理結合子として論理積 (AND)，排他的論理和 (XOR)，および，否定 (NOT) のみを用いた論理式で表しなさい．ただし，式中では a_3，a_2，a_1，a_0 をそれぞれ 1 度だけ用いてよい．

(5) b_0 を以下の形で表すとき，A〜D に当てはまる部分論理式をそれぞれ示しなさい．ただし，A〜D のそれぞれは a_3，a_2，a_1，a_0（またはその否定）のうち 2 つをそれぞれ 1 度だけ用いてよい．

$$b_0 = A \cdot B + C \cdot D$$

(6) 入力 a_3，a_2，a_1，a_0 が図 2 の回路に同時に与えられた場合に，出力 b_2，b_1，b_0 が同時に確定するようにしたい．このとき回路に挿入すべき論理ゲートの種類と位置を説明しなさい．ただし，以下をすべて満たすようにすること．

- 入力に対する出力を変えないこと．
- 論理ゲートは図 1 で示されたものだけを用いること．
- 論理ゲートの挿入以外は回路を変更しないこと．

なお，回路の遅延は以下を満たしていると仮定する．

- 3 入力 OR は 2 入力 OR の 2 倍の遅延がかかる．
- 2 入力 OR は NOT と同じ遅延である．
- NOT と AND の遅延は 0 ではない．
- 同じ種類の論理ゲートの遅延は同じである．
- 配線遅延は無視できるほど小さい．

Write the answers to Problem I on one answer sheet, and clearly label it at the top of the page as "Problem I." Do not write answers to other problems on the answer sheet.

Problem I Answer the following questions regarding vectors $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4$ below.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Find the dimension of the vector space V spanned by $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{v}_4$.

(2) Find a basis of the vector space V, and show it is a basis.

(3) Find an orthogonal basis of the vector space V.

Write the answers to Problem II on one answer sheet, and clearly label it at the top of the page as "Problem II." Do not write answers to other problems on the answer sheet.

Problem II

(1) Consider a tangent line L to the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ $(x \geq 0, y \geq 0)$ at a point (a, b) $(a > 0, b > 0)$ on the curve. Let P and Q denote the points at which the tangent line L intersects the x-axis and the y-axis, respectively. Answer Questions (1-1) and (1-2) below.

(1-1) Find the equation of the tangent line L.

(1-2) Prove that the length of the line segment PQ is 1 for any point of tangency (a, b).

(2) Define the domain D as $D = \{(x, y) |\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$. Then, evaluate the following double integral I.

$$I = \iint_D xy\ dxdy$$

Write the answers to Problem III on one answer sheet, and clearly label it at the top of the page as "Problem III." Do not write answers to other problems on the answer sheet.

Problem III

(1) Let $\mathbb{Z}$ be the set of integers and $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ be the function defined by

$$f(x, y, z) = \begin{cases} y & (x \le y) \\ f(f(x-1, y, z), f(y-1, z, x), f(z-1, x, y)) & (x > y). \end{cases}$$

Let $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ be the function defined as $g(x) = f(x+1, x, x+2)$. Answer the following questions.

(1-1) Evaluate the value of $f(2, 1, 3)$. Show the calculation steps.

(1-2) Prove that the function g is bijective.

(1-3) Prove that $f(x+2, x+1, x) = x+2$ holds for any $x \in \mathbb{Z}$.

(2) Let $\mathbb{N}$ be the set of natural numbers (including 0) and R be the binary relation on $\mathbb{N}$ defined by

$$R = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \bmod 2 = y \bmod 2 \land x \bmod 3 = y \bmod 3\}.$$

Here, $a \bmod b$ represents the remainder when a natural number a is divided by a natural number $b \neq 0$. Answer the following questions.

(2-1) Write predicate logic formulas that respectively express the reflexive, symmetric, and transitive properties of a binary relation. Also prove that the relation R satisfies all these properties.

(2-2) Show that the composition $R \circ R$ does not satisfy the antisymmetric property by providing a counterexample.

(2-3) Let $[a]$ be the equivalence class $\{x \in \mathbb{N} \mid a \; R \; x\}$ of a natural number a by the equivalence relation R. Prove that $[3] \cap [5] = \emptyset$ holds.

Write the answers to Problem IV on one answer sheet, and clearly label it at the top of the page as "Problem IV." Do not write answers to other problems on the answer sheet.

Problem IV Let us consider an undirected graph $G = (V, E)$ consisting of a set V of N vertices and a set E of M edges. We assume that the number of edges between any two vertices is at most one, and there is no edge whose ends are the same vertex.

This undirected graph G can be represented by a square matrix of order N, which is called an adjacency matrix. The element at i-th row and j-th column of this matrix is represented by $a_{i,j}$. If there is an edge between two vertices $v_i, v_j \in V$ $(0 \le i \le N-1,\ 0 \le j \le N-1)$, then $a_{i,j} = a_{j,i} = 1$, otherwise $a_{i,j} = a_{j,i} = 0$.

Figure 1 shows a C language program which searches all paths between two different vertices in the undirected graph represented by the following adjacency matrix A. We assume that the same vertex does not appear more than once in any path.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Answer the following questions.

(1) Illustrate the undirected graph represented by the adjacency matrix A.

(2) The function `traverse` outputs to the standard output all paths of which the start vertex is indicated by the argument `start` and the end vertex is indicated by the argument `goal`. The array `path` stores the vertex indices that appear in the path found by the current search in the order from the start vertex. The array `visited` indicates whether each vertex appears in the path. The function `dfs` called by the function `traverse` searches paths by depth first search. The argument `step` indicates the number of edges in the path. Fill in the boxes `(a)` to `(e)` in Figure 1 to complete the program.

(3) Write the result of the output shown on the standard output when the program in Figure 1 is executed.

(4) Write the number of calls to the function `dfs` when the program in Figure 1 is executed.

(5) Given a sparse undirected graph (an undirected graph with only a few edges), it is possible to modify the program in Figure 1 to reduce its time complexity. Show the outline of the modification and the reason why it reduces the time complexity.

```
#include <stdio.h>
#include <stdbool.h>
#define N 7

const int a[N][N] = {
    {0, 1, 1, 0, 0, 0, 0},
    {1, 0, 1, 1, 0, 0, 0},
    {1, 1, 0, 0, 1, 0, 0},
    {0, 1, 0, 0, 1, 1, 0},
    {0, 0, 1, 1, 0, 0, 1},
    {0, 0, 0, 1, 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, 0, 1, 0, 0},
};


void print_path(int n, int path[])
{
    for (int i = 0; i < n; i++)
        printf("%d ", path[i]);
    printf("\n");
}


void dfs(int step, int goal, int path[], bool visited[])
{
    int x = path[step - 1];
    if (x == goal) {
        print_path(step, path);
    } else {
        for (int i = 0; i < N; i++) {
            if (a[x][i] == 0) continue;
            if (!visited[i]) {
                path[ (a) ] = i;
                visited[i] = (b) ;
                dfs( (c) , (d) , path, visited);
                visited[i] = (e) ;
            }
        }
    }
}

void traverse(int start, int goal)
{
    int path[N];
    bool visited[N];

    for (int i = 0; i < N; i++) visited[i] = false;
    path[0] = start;
    visited[start] = true;
    dfs(1, goal, path, visited);
}

int main(void)
{
    traverse(0, 6);
    return 0;
}
```

Figure 1: A C language program for path-finding in the undirected graph

Write the answers to Problem V on one answer sheet, and clearly label it at the top of the page as "Problem V." Do not write answers to other problems on the answer sheet.

Problem V Given the logic circuit illustrated in Figure 2 using the logic gates in Figure 1, answer the following questions.

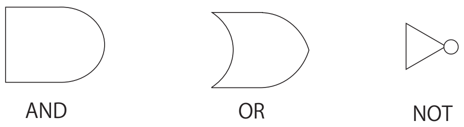

Figure 1: Logic gates

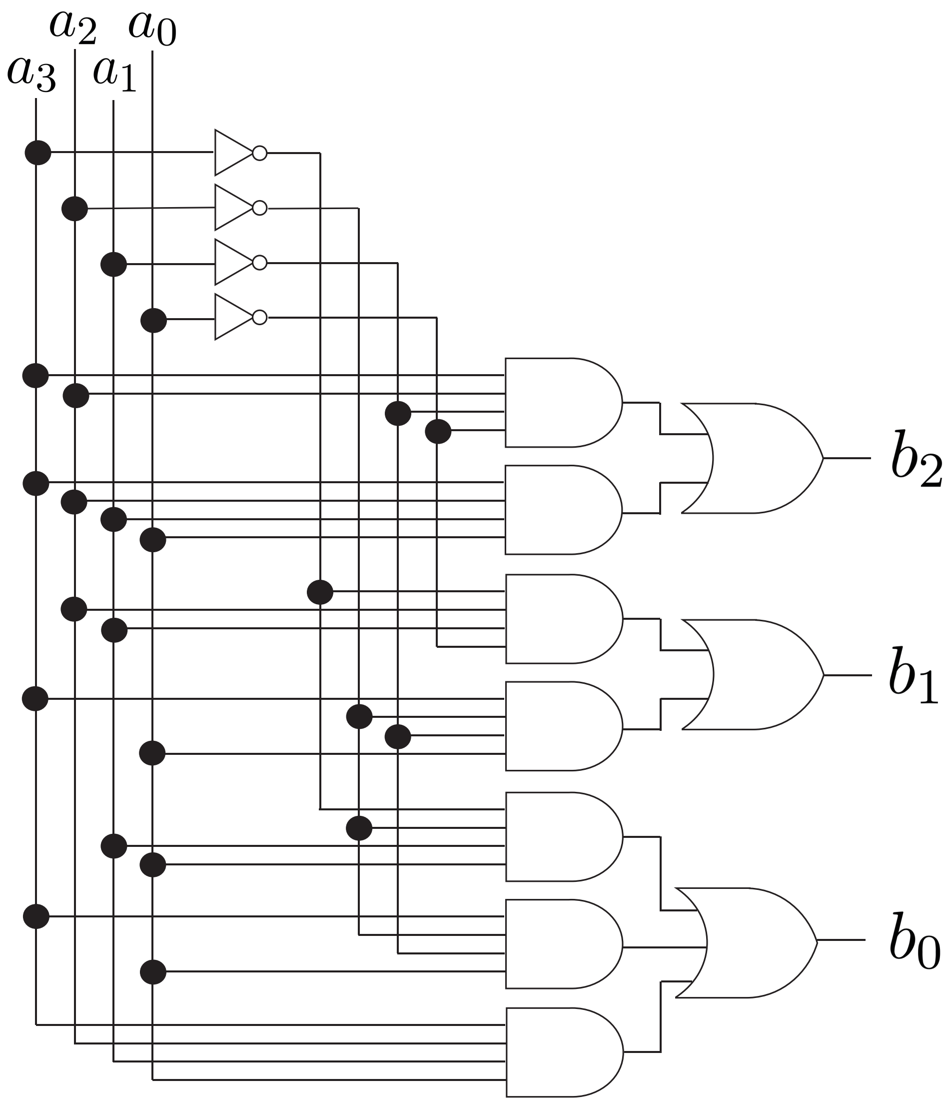

Figure 2: A logic circuit

(1) Write a logical formula for each of the outputs b_2, b_1 and b_0 using the inputs a_3, a_2, a_1 and a_0.

(2) Write the truth table that shows the relationship between the inputs and the outputs of the logic circuit in Figure 2.

(3) Complete the following Karnaugh map for b_2.

a_3a_2 \ a_1a_0	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

(4) Write a logical formula for b_2 using only AND, XOR and NOT as logical connectives. Here, the formula may include each of a_3, a_2, a_1 and a_0 at most once.

(5) Given the following formula for b_0, find the logical subformulas A to D. Here, each of A to D may include two of a_3, a_2, a_1, a_0 and their negations at most once.

$$b_0 = A \cdot B + C \cdot D$$

(6) We want to obtain the outputs b_2, b_1 and b_0 simultaneously when the inputs a_3, a_2, a_1 and a_0 are given simultaneously in the logic circuit in Figure 2. Explain which logic gate(s) must be inserted to the circuit, and the place where these gate(s) must be inserted. For this question:

- do not change the relationship between the inputs and the outputs of the logic circuit;
- use only the logic gate(s) in Figure 1;
- do not change the logic circuit except for insertion of logic gate(s).

Additionally, assume the followings about the delays in the logic circuit:

- the delay of a three-input OR is twice as large as a two-input OR;
- a two-input OR has the same delay as NOT;
- the delays of NOT and AND are not zero;
- the delays of logic gates of the same type are equivalent;
- wire delay is so small as to be negligible.