様相論理 (modal logic)

文が正しいかどうかはどのようにして決まるか

例

「安倍晋三は日本の総理大臣である．」

これは現在は真であるが，5年前(2006-2007)も真．未来は…?

「太陽系には9つの惑星がある．」

ついこの間まで真であったはずだが…

「3の3乗は27である．」

これはずっと真であるはず…

しかしながら，例えば小学生は真であることを知らない．

文が正しいかどうかを決める様相(mode)を考える．

「必然的に正しい」「正しい可能性がある」

「正しいこと知っている」「いずれ正しくなる」etc.

様相論理で扱う例題

3人の賢者

王様が3人の賢者のうち誰が一番賢いかを知る目的で,

3人の額に白か赤かの印を付けた.

自分の額の印の色はわからない.

王様は

「少なくとも一人の印の色は赤だ. 自分の額の色を当てろ」

と告げ, ひとりづつ順に聞いていった.

最初の人は「わからない」と答え,

それを聞いた次の人も「わからない」と答えたが

それを聞いた3人目の賢者は「わかった」と答えた.

なぜか. また, 何色であったか.

(実際にはmulti-agent modal logicに拡張しないと解析できない)

	A	B	C	
FALSE	W	W	W	少なくとも一人は赤であることに反する
	W	W	R	
FALSE	W	R	W	ACが白であるのでBは赤であることに気づくはず
	W	R	R	
FALSE	R	W	W	BCが白であるのでAは赤であることに気づくはず
	R	W	R	
FALSE	R	R	W	※
	R	R	R	

※　Cの推論

「Bが，Aが赤(R)，Cが白(W)をみたと仮定する．このときBにとっての選択肢はRRWかRWW．

Aが「わからない」と答えたので，BもRWWではないことがわかる．

(RWWならばAがRであることがわかるはず．)

したがって，BはRRWであることに気づくはずである．

しかしながらBは「わからない」と答えたので，RRWでもない．

よって，　最初の仮定が間違っていて，RRWではありえない．

命題様相論理

(propositional modal logic)

文法

$p, q, r, p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots \in$Atom: 原始命題 (atomic formulas)

様相論理の論理式φは，以下のBNFによって定義される

$\phi ::= \bot \mid \top \mid p \mid (\neg\phi) \mid (\phi\wedge\phi) \mid (\phi\vee\phi) \mid (\phi\supset\phi) \mid (\phi\equiv\phi) \mid (\Box\phi) \mid (\Diamond\phi)$
但しpは原始命題

□, ◇: 様相演算記号(modal operator)

□, ◇の結合力が最も強いとして，かっこは適宜省略する.

読み方　□: box, ◇: diamond

直感的な意味

□ϕ: ϕが必然的に真である.

◇ϕ: ϕが真である可能性がある.

「知識の論理」においては

□ϕ: Agent Qはϕが真であることを知っている.

◇ϕ: ϕが真であることは知識と矛盾しない.

□□ϕ: 「ϕが必然的に真であること」が必然的に真である.

「Qがϕが真であることを知っている」ことをQが知っている.

同値な命題

$\neg\Box\phi \quad \equiv \quad \Diamond\neg\phi,$

φが必然的に真ではない.　⇔　φが真でない可能性がある.

φが真であることを知らない　⇔　φが真でないことは知識と矛盾しない.

$\Box\neg\phi \quad \equiv \quad \neg\Diamond\phi$

φでないことは必然的に真である.　⇔　φが真である可能性がない.

φでないことを知っている.　⇔　φが真であることは知識と矛盾する.

以下の式は成り立つだろうか.

$\Box(\phi \supset \psi) \supset (\Box\phi \supset \Box\psi)$

φならばψが必然的に成立ち，φが必然的に成立つならばψも必然的に成立つ

φならばψを知っていて，φを知っているならばψも知っている

$(\Box\phi \supset \Box\psi) \supset \Box(\phi \supset \psi)$

φが必然的に成立つならばψも必然的に成立つならば,

φならばψも必然的に成立つ

φを知っているならばψも知っているならば，φならばψも知っている

命題論理的に同値な式で書き換えると

$(\neg\Box\phi \supset \Box(\phi \supset \psi)) \wedge (\Box\psi \supset \Box(\phi \supset \psi))$

となる．これは適切か?

$\Box\phi \supset \phi$

$\phi \supset \Box\phi$

$\Box\phi \supset \Box\Box\phi$

$\Diamond\phi \supset \Box\Diamond\phi$

様相のいろいろな捉え方

□φ	◇φ
φが必然的に真	φが真である可能性がある
φは未来では常に真	φはいずれ未来で真になる
φであるべきである	φであることを許す
agent Qがϕであることを信じる	agent Qの信念とϕが矛盾しない
agent Qがϕであることを知っている	agent Qの知識とϕが矛盾しない
プログラムPがどのように実行されても，その実行後にϕが成立つ	プログラムPのある実行後にはϕが成立つ

様相のいろいろな捉え方

$\Box\varphi$	$\Box\varphi\supset\varphi$	$\Box\varphi\supset\Box\Box\varphi$	$\Diamond\varphi\supset\Box\Diamond\varphi$	$\Diamond T$	$\Box\varphi\supset\Diamond\varphi$	$\Box(\varphi\supset\psi)\wedge\Box\phi\supset\Box\psi$	$\Diamond\varphi\wedge\Diamond\psi\supset\Diamond(\varphi\wedge\psi)$
φが必然的に真	○	○	○	○	○	○	
φは未来では常に真		○				○	
φであるべきである				○	○	○	
agent Qがϕであることを信じる		○	○	○	○	○	
agent Qがϕであることを知っている	○	○	○	○	○	○	
プログラムPがどのように実行されても，その実行後にϕが成立つ						○	

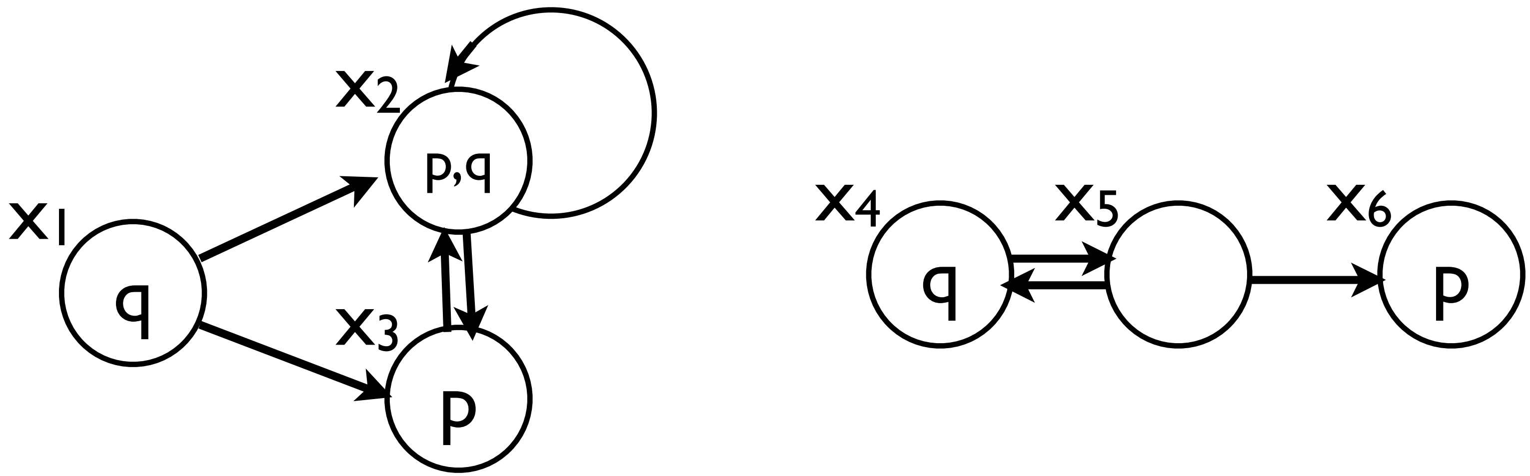
意味論(semantics)

- クリプキ構造(Kripke Structure)
  - モデル: M=(W, R, L)
    - W: 可能世界(worlds)の集合
    - R: W×W : 接近可能性関係(accesibility relation)
      - 可能世界同士の間で接近できるかどうかの関係
    - L: W→P(Atom): ラベル付け関数(labelling function)
      - 原始命題が個々の可能世界で真であるかどうかを決める関数

例

W={x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 }
R(x_1, x_2), R(x_1, x_3), R(x_2, x_2), R(x_2, x_3), R(x_3, x_2), R(x_4 x_5), R(x_5, x_4), R(x_5 x_6)
L(x_1)={q}, L(x_2)={p, q}, L(x_3)={p}, L(x_4)={q}, L(x_5)=Φ, L(x_6)={p}

図示すると以下のようになる



充足関係(satisfaction relation) $x \models \phi$

可能世界$x \in W$でϕが充足される(成立つ，真である)

以下のようにϕの構造に関して帰納的に定義する

$x \models \top$

$x \not\models \bot$

$x \models p \Leftrightarrow p \in L(x)$

$x \models \neg\phi \Leftrightarrow x \not\models \phi$

$x \models \phi \vee \psi \Leftrightarrow x \models \phi$または $x \models \psi$

$x \models \phi \wedge \psi \Leftrightarrow x \models \phi$かつ $x \models \psi$

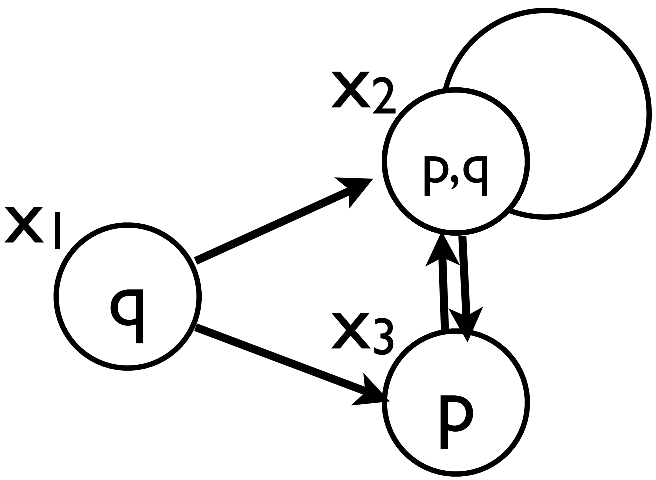
$x \models \phi \supset \psi \Leftrightarrow x \models \phi$ならば $x \models \psi$

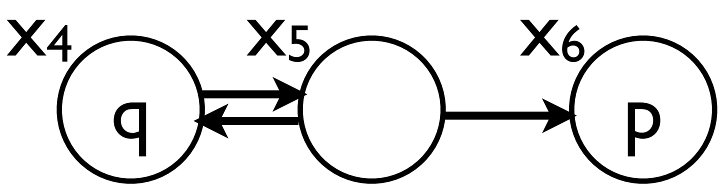
$x \models \Box\phi \Leftrightarrow R(x, y)$なる全てのyに対して$y \models \phi$

$x \models \Diamond\phi \Leftrightarrow R(x, y)$なるあるyに対して$y \models \phi$

- 例　下記のモデルで
    - $x_1 \models q$
    - $x_1 \models \Diamond q$
    - $x_1 \not\models \Box q$
    - $x_5 \not\models \Box p$, $x_5 \not\models \Box q$
    - $x_5 \not\models \Box p \lor \Box q$,

- $x_5 \models \Box(p \lor q)$
- $x_6 \models \Box p$, $x_6 \not\models \Diamond p$
- $x_6 \not\models \Diamond T$
- $x_6 \models \Box \bot$





$M \models \phi$　　　　　ϕはMで満足される(satisfy)

$M = (W, R, L)$に対しどのような$x \in W$に対しても$x \models \phi$

$\models \phi$　　　　ϕは妥当(valid)である.

どのようなMについても $M \models \phi$である.

二項関係Rの諸特性

反射的(reflexive): R(x, x)

対称的(symmetric): R(x, y)ならばR(y, x)

推移的(transitive): R(x, y), R(y, z)ならばR(x, z)

直列的(serial): どんなx∈Wに対してもR(x, y)なるyが存在する

ユークリッド的(Euclidean): R(x, y), R(x, z)ならばR(y, z)

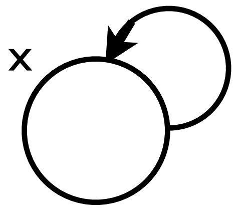
関数的(functional): どんなx∈Wに対してもR(x, y)なるyが一つだけ存在する

線形的(linear): R(x, y), R(x, z)ならばR(y, z)またはy=zまたはR(z, y)

全的(total): R(x, y)またはR(y, x)

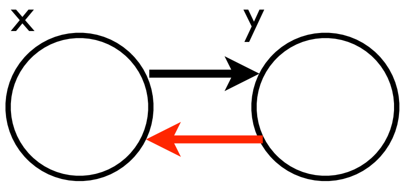
同値関係: 反射的, 対称的, 推移的

反射的, 推移的, ユークリッド的でも同値関係である.



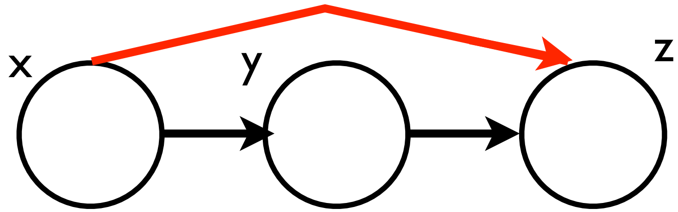
reflexive

$R(x, x)$



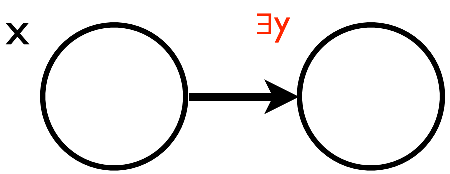
symmetric

$R(x, y) \supset R(y, x)$



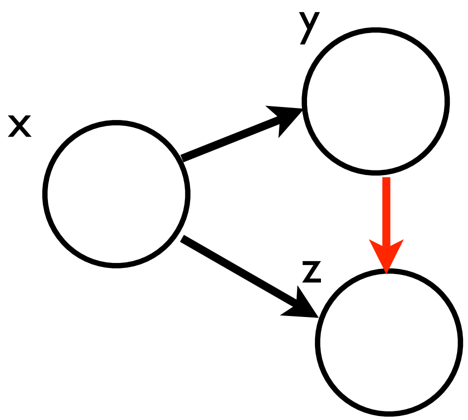
transitive

$R(x, y) \wedge R(y, z) \supset R(x, z)$



serial

$\exists y R(x, y)$



Euclidean

$R(x, y) \wedge R(x, z) \supset R(y, z)$

問

反射的, 対称的, 推移的⇔反射的，推移的，ユークリッド的
であることを示せ.

反射的(reflexive): R(x, x)

対称的(symmetric): R(x, y)ならばR(y, x)

推移的(transitive): R(x, y), R(y, z)ならばR(x, z)

ユークリッド的(Euclidean): R(x, y), R(x, z)ならばR(y, z)

解

(→)
R(x, y)，R(x, z)と仮定し，R(y, z)を導く.

対称的なので，R(x, y)よりR(y, x)．したがって，推移的なので，R(y, x)とR(x, z)からR(y, z).

(←)
R(x, y)と仮定し，R(y, x)を導く.

反射的なのでR(x, x)．したがって，ユークリッド的なので，R(x, y)とR(x, x)よりR(y, x).

問

Rが反射的であることと

どのようなラベル関数Lに対しても，どのようなxでも$x \models \Box p \supset p$が成り立つことが

同値であることを示せ.

解

(→)

$x \models \Box p$であるとする．定義よりR(x, y)なる全てのyで$y \models p$であるが，R(x, x)なので，

$x \models p$.

すなわち$x \models \Box p \supset p$.

(←)

$x \models \Box p \supset p$とし，

x以外のyに対しては$p \in L(y)$であるが$p \notin L(x)$であるようなlabeling function Lを考える.

R(x, x)でないと仮定する(帰謬法 の仮定).

すると，上記のLの仮定より，

xから到達できるどのworld yでも$y \models p$であるので，$x \models \Box p$である.

一方，$x \not\models p$である.

これは$x \models \Box p \supset p$と矛盾する.

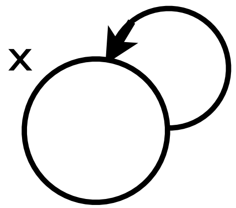
Rの特性と関係する式

名前	式	特性
T	$\Box\varphi\supset\varphi$	reflexive
B	$\varphi\supset\Box\Diamond\varphi$	symmetric
D	$\Box\varphi\supset\Diamond\varphi$	serial
4	$\Box\varphi\supset\Box\Box\varphi$	transitive
5	$\Diamond\varphi\supset\Box\Diamond\varphi$	Euclidean
	$\Box\varphi\supset\Diamond\varphi$	functional
	$\Box(\varphi\wedge\Box\varphi\supset\psi)\vee\Box(\psi\wedge\Box\psi\supset\varphi)$	linear

φがTのもとで妥当なとき，$\models_{KT}\varphi$　と表す.

同様に，$\models_{KT4}\varphi$, $\models_{KT45}\varphi$等がある.

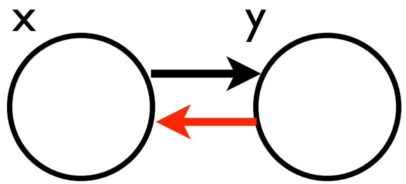
ただし，Kとは $\Box(\varphi\supset\psi)\supset(\Box\varphi\supset\Box\psi)$のこと.



reflexive

$R(x, x)$

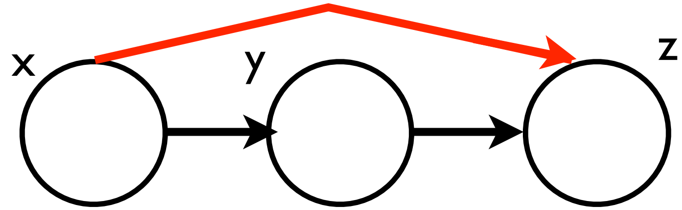
$\Box\varphi \supset \varphi$



symmetric

$R(x, y) \supset R(y, x)$

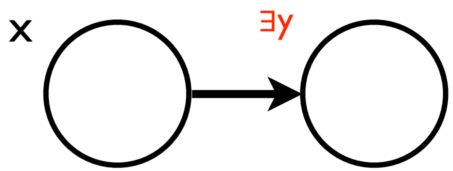
$\varphi \supset \Box\Diamond\varphi$



transitive

$R(x, y) \wedge R(y, z) \supset R(x, z)$

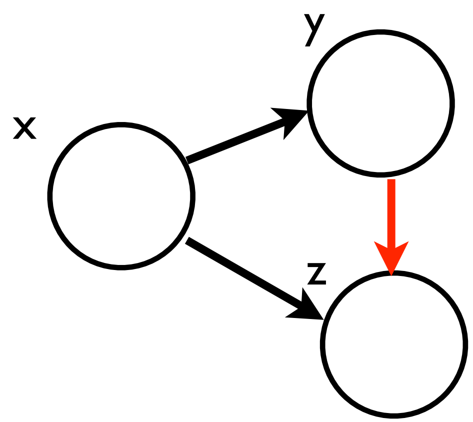
$\Box\varphi \supset \Box\Box\varphi$



serial

$\exists y R(x, y)$

$\Box\varphi \supset \Diamond\varphi$



Euclidean

$R(x, y) \wedge R(x, z) \supset R(y, z)$

$\Diamond\varphi \supset \Box\Diamond\varphi$

例

$\Box\phi$を「agent Qがϕを知っている」を意味するとする.

R(x, y)は,

yがxにおけるQの知識に関する現実世界(actual world)を意味する.

Rは反射的か?

Qがϕを知っているならばそれは事実であるはずである.

⇒反射的であるだろう.

Rは推移的か?

yがxからみたQの知識の世界であり，zがyから見たそれであれば

zもxからみたQの知識の世界であろう.

⇒推移的であるだろう.

命題様相論理

(propositional modal logic)

公理系

どのような様相を論じるかによって採用される公理が異なる.

真理論的様相にはS5=KT45(公理としてK, T, 4, 5を採用)が適切だが,

認識論的様相にはS4=KT4 (公理としてK, T, 4を採用) が適切だと考えられている

推論規則　φが証明されるならば□φも証明される

公理K　$\Box(\phi\supset\psi)\supset(\Box\phi\supset\Box\psi)$

公理T　$\Box\phi\supset\phi$　必然的に真ならば，真

(reflexive)　Qがφを知っているならばφは真

公理4　$\Box\phi\supset\Box\Box\phi$　必然的に真ならば，必然的に「必然的に真」

(transitive)　Qがφを知っているならば

Qは「Qがφを知っている」ことを知っている

公理5　$\Diamond\phi\supset\Box\Diamond\phi$　真であることが可能ならば,

(Euclidean)　真であることが可能なのは必然

Qにとってφが知識と矛盾しないならば

QはQにとってφが知識と矛盾しないことを知っている

Qがφを知らないならば

Qは「Qがφを知らない」ことを知っている

推論規則

通常の命題論理の推論規則(ここでは自然演繹法(Natural Deduction)を用いる)に様相演算記号のための規則を追加する.

自然演繹法の推論規則

(これにもいろいろな流儀があることに注意)

$$(\wedge I)\ \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi\wedge\psi} \qquad (\wedge E)\ \frac{\varphi\wedge\psi}{\varphi} \qquad \frac{\varphi\wedge\psi}{\psi}$$

$$(\vee I)\ \frac{\varphi}{\varphi\vee\psi} \qquad \frac{\psi}{\varphi\vee\psi} \qquad (\vee E)\ \frac{\varphi\vee\psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ X\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ X\end{array}}}{X}$$

$$(\supset I)\ \frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\varphi\supset\psi} \qquad (\supset E)\ \frac{\varphi\supset\psi \quad \varphi}{\psi} \qquad (\neg I)\ \frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \perp\end{array}}}{\neg\varphi} \qquad (\neg E)\ \frac{\neg\varphi \quad \varphi}{\perp}$$

$$(\perp E)\ \frac{\perp}{\varphi} \qquad (\neg\neg E)\ \frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$$

ここで, $\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}$ は

φを仮定したときにψが証明されることを表し,

その直後の推論でφは仮定でなくなる

自然演繹法による**命題論理**の証明図の例

1	$p\wedge q$	仮定
2	p	$\wedge$E 1
3	q	$\wedge$E 1
4	$q\wedge p$	$\wedge$I 2, 3
5	$p\wedge q\supset q\wedge p$	$\supset$I 1-4

1	$p\wedge(q\vee r)$	仮定
2	p	$\wedge$E 1
3	$q\vee r$	$\wedge$E 1
4	q	仮定
5	$p\wedge q$	$\wedge$I 2, 4
6	$p\wedge q\vee p\wedge r$	$\vee$I 5
7	r	仮定
8	$p\wedge r$	$\wedge$I 2, 7
9	$p\wedge q\vee p\wedge r$	$\vee$I 8
10	$p\wedge q\vee p\wedge r$	$\vee$E 3, 4-6, 7-9
11	$p\wedge(q\vee r)\supset p\wedge q\vee p\wedge r$	$\supset$I 1-10

1	p	仮定
2	$\neg p$	仮定
3	$\perp$	$\neg$E 1, 2
4	$\neg\neg p$	$\neg$I 2-3
5	$p\supset\neg\neg p$	$\supset$I 1-4

1	$\neg\neg p$	仮定
2	p	$\neg\neg$E 1
3	$\neg\neg p\supset p$	$\supset$I 1-2

様相論理として追加される推論規則

破線の箱は接近可能な任意の可能世界での推論を表す.

$$(\Box I)\ \dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}}}{\Box\varphi}$$

もし破線の箱の中でϕが証明されるのならば,
(それは任意の可能世界で証明されたことになるので)
□φが証明できたことになる.

$$(\Box E)\ \dfrac{\Box\varphi}{\boxed{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\\ \\ \end{array}}}$$
$$\vdots$$

もし□ϕが証明されるのならば,
破線の箱の中でϕに関する証明をしてよい.

- KT45での追加規則

  公理T, 4, 5の代わりに以下の同値な規則をおく.

$$(T)\ \dfrac{\Box\varphi}{\varphi} \qquad (4)\ \dfrac{\Box\varphi}{\Box\Box\varphi} \qquad (5)\ \dfrac{\neg\Box\varphi}{\Box\neg\Box\varphi}$$

Multi-Agent Systemにおける知識の推論

$KT45^n$

KT45を基礎とする.

□のかわりに，様相記号K_iを用いる.

K_i：「agent iが知っている」

$i \in A = \{1, 2, \ldots, n\}$ agentsの集合

例:　$K_1 p \wedge K_1 \neg K_2 K_1 p$

agent 1はpを知っていて,

agent 1はagent 2がagent 1はpを知っていることを知らないことを知っている.

様相記号E_G $(G \subseteq A)$

Gに属する全てのagentが知っている

$E_G\ p \equiv K_{j1} p \wedge \ldots \wedge K_{jm} p \qquad j_1, \ldots, j_m \in G$

様相記号C_G

Gに属するagentの間での「共通知識」

$C_G\ p \equiv E_G\ p \wedge E_G E_G\ p \wedge E_G E_G E_G\ p \wedge \ldots$

- **3人の賢者の形式化**

p_i: iは赤い印を付けている

知識 (問題に依存する公理) Γ

$C(p_1 \vee p_2 \vee p_3)$, $C(p_i \supset K_j\, p_i)$, $C(\neg p_i \supset K_j\, \neg p_i)$ (i, j=1, 2, 3, i≠j)

1人目の

C(¬

3人目の

K_3p

証明すべ

$\Gamma \wedge C(\neg K_1 p_1 \wedge \neg K_1 \neg p_1) \wedge C(\neg K_2 p_2 \wedge \neg K_2 \neg p_2) \supset K_3 p_3$
ではない.

1番目の人が「わからない」といったことと

2番目の人が「わからない」といったことの

時間推移が反映されていない.

$\Gamma \wedge C(\neg K_1 p_1 \wedge \neg K_1 \neg p_1) \supset C(p_2 \vee p_3)$

$\Gamma \wedge C(p_2 \vee p_3) \wedge C(\neg K_2 p_2 \wedge \neg K_2 \neg p_2) \supset K_3 p_3$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{ll} K_i & \\ & \vdots \\ & \phi \end{array}}}{K_i\phi}\ K_i\mathrm{i} \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{ll} E_G & \\ & \vdots \\ & \phi \end{array}}}{E_G\phi}\ E_G\mathrm{i} \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{ll} C_G & \\ & \vdots \\ & \phi \end{array}}}{C_G\phi}\ C_G\mathrm{i}$$

$$\frac{K_i\phi}{\boxed{\begin{array}{ll} K_i & \vdots \\ & \phi \\ & \vdots \end{array}}}\ K_i\mathrm{e} \qquad \frac{E_G\phi}{\boxed{\begin{array}{ll} E_G & \vdots \\ & \phi \\ & \vdots \end{array}}}\ E_G\mathrm{e} \qquad \frac{C_G\phi}{\boxed{\begin{array}{ll} C_G & \vdots \\ & \phi \\ & \vdots \end{array}}}\ C_G\mathrm{e}$$

$$\frac{K_i\,\phi \text{ for each } i \in G}{E_G\,\phi}\ KE \qquad \frac{E_G\,\phi \quad i \in G}{K_i\,\phi}\ EK_i \qquad \frac{C_G\,\phi}{E_G\ldots E_G\,\phi}\ CE$$

$$\frac{C_G\,\phi \quad i_j \in G}{K_{i_1}\ldots K_{i_k}\,\phi}\ CK \qquad \frac{C_G\,\phi}{C_G C_G\,\phi}\ C4 \qquad \frac{\neg C_G\,\phi}{C_G \neg C_G\,\phi}\ C5$$

$$\frac{K_i\,\phi}{\phi}\ KT \qquad \frac{K_i\,\phi}{K_i K_i\,\phi}\ K4 \qquad \frac{\neg K_i\,\phi}{K_i \neg K_i\,\phi}\ K5$$

1	$C(p_1 \vee p_2 \vee p_3)$	premise
2	$C(p_i \rightarrow K_j\, p_i)$	premise, $(i \neq j)$
3	$C(\neg p_i \rightarrow K_j\, \neg p_i)$	premise, $(i \neq j)$
4	$C \neg K_1\, p_1$	premise
5	$C \neg K_1\, \neg p_1$	premise
6	C	
7	$\neg p_2 \wedge \neg p_3$	assumption
8	$\neg p_2 \rightarrow K_1\, \neg p_2$	Ce 3 $(i, j) = (2, 1)$
9	$\neg p_3 \rightarrow K_1\, \neg p_3$	Ce 3 $(i, j) = (3, 1)$
10	$K_1\, \neg p_2 \wedge K_1\, \neg p_3$	prop $7, 8, 9$
11	$K_1\, \neg p_2$	$\wedge$e$_1$ 10
12	$K_1\, \neg p_3$	$\wedge$e$_2$ 10
13	K_1	
14	$\neg p_2$	K_1e 11
15	$\neg p_3$	K_1e 12
16	$\neg p_2 \wedge \neg p_3$	$\wedge$i $14, 15$
17	$p_1 \vee p_2 \vee p_3$	Ce 1
18	p_1	prop 16, 17
19	$K_1\, p_1$	K_1i 13–18
20	$\neg K_1\, p_1$	Ce 4
21	$\perp$	$\neg$e $19, 20$
22	$\neg(\neg p_2 \wedge \neg p_3)$	$\neg$i 7–21
23	$p_2 \vee p_3$	prop 22
24	$C(p_2 \vee p_3)$	Ci 6–23

1	$C(p_1 \vee p_2 \vee p_3)$	premise
2	$C(p_i \rightarrow K_j\, p_i)$	premise, $(i \neq j)$
3	$C(\neg p_i \rightarrow K_j\, \neg p_i)$	premise, $(i \neq j)$
4	$C\neg K_2\, p_2$	premise
5	$C\neg K_2\, \neg p_2$	premise
6	$C(p_2 \vee p_3)$	premise
7	K_3	
8	$\neg p_3$	assumption
9	$\neg p_3 \rightarrow K_2\, \neg p_3$	CK 3 $(i, j) = (3, 2)$
10	$K_2\, \neg p_3$	$\rightarrow$e 9, 8
11	K_2	
12	$\neg p_3$	K_2e 10
13	$p_2 \vee p_3$	Ce 6
14	p_2	prop 12, 13
15	$K_2\, p_2$	K_2i 11–14
16	$K_i\, \neg K_2\, p_2$	CK 4, for each i
17	$\neg K_2\, p_2$	KT 16
18	$\perp$	$\neg$e 15, 17
19	p_3	PBC 8–18
20	$K_3\, p_3$	K_3i 7–19