while規則(while rule)

$$\frac{\{A \wedge t\}P\{A\}}{\{A\}\textbf{while}\ t\ \textbf{do}\ P\ \textbf{od}\{A \wedge \neg t\}}$$

このようなAを

ループ不変表明(loop invariant assertion)という

例

$$\frac{\{b\neq 0 \land gcd(a, b)=gcd(x, y)\}\ P\ \{gcd(a, b)=gcd(x, y)\}}{\{gcd(a, b)=gcd(x, y)\}\ \textbf{while}\ b\neq 0\ \textbf{do}\ P\ \textbf{od}\ \{b=0 \land gcd(a, b)=gcd(x, y)\}}$$

但しP ： **begin** a:=a **mod** b; c:=a; a:=b; b:=c **end**

上の証明結果より

{(x≠0∨y≠0)∧a=x∧b=y} **while** b≠0 **do** P **od** {|a|=gcd(x, y)}

はどうやって導くか?

$(x\neq 0 \lor y\neq 0)\land a=x \land b=y \supset gcd(a, b)=gcd(x, y)$

$b=0 \land gcd(a, b)=gcd(x, y) \supset |a|=gcd(x, y)$ $(\because gcd(a, 0)=|a|)$

より，帰結規則を用いる.

条件規則(conditional rule)

$$\frac{\{t \wedge A\}\ P\{B\} \qquad \neg t \wedge A \supset B}{\{A\}\ \text{if } t \text{ then } P \text{ fi}\{B\}}$$

$$\frac{\{t \wedge A\}\ P_1\{B\} \qquad \{\neg t \wedge A\}\ P_2\{B\}}{\{A\}\ \text{if } t \text{ then } P_1 \text{ else } P_2 \text{ fi}\{B\}}$$

例

$$\frac{\{|x|=x_0 \wedge x<0\}\ x:=-x\{x=x_0\} \qquad |x|=x_0 \wedge x \geq 0 \supset x=x_0}{\{|x|=x_0\}\ \text{if } x<0 \text{ then } x:=-x\{x=x_0\}}$$

条件規則(conditional rule)

$$\frac{\{t\wedge A\}\ P\{B\} \qquad \neg t\wedge A\supset B}{\{A\}\ \text{if}\ t\ \text{then}\ P\ \text{fi}\{B\}}$$

$$\frac{\{t\wedge A\}\ P_1\{B\} \qquad \{\neg t\wedge A\}\ P_2\{B\}}{\{A\}\ \text{if}\ t\ \text{then}\ P_1\ \text{else}\ P_2\ \text{fi}\{B\}}$$

例

$$\{-x=x_0\}\ x:=-x\{x=x_0\}$$

$$\Big\downarrow ?$$

$$\frac{\{|x|=x_0\wedge x<0\}\ x:=-x\{x=x_0\} \qquad |x|=x_0\wedge x\geq 0\supset x=x_0}{\{|x|=x_0\}\ \text{if}\ x<0\ \text{then}\ x:=-x\{x=x_0\}}$$

演習

x, y, zを自然数とする.

このとき以下を証明せよ.

$$\{y=1 \wedge z=0\}\ \mathrm{while}\ z \neq x\ \mathrm{do\ begin}\ z:=z+1; y:=y*z\ \mathrm{end}\{y=x!\}$$

- プログラム変数と論理変数
  - プログラム変数
    - 検証対象のプログラムの変数
    - 表明の中で量記号で束縛されない
  - 論理変数
    - 表明のための変数
    - プログラム中に出現しない

例

Fact:

y:=1;**while** x≠0 **do begin** y:=y*x; x:=x-1
end od

このプログラムの部分的正当性は

例

Fact:

y:=1;**while** x≠0 **do begin** y:=y*x; x:=x-1
end od

このプログラムの部分的正当性は

$$\{\ x \geq 0\ \}\ \mathrm{Fact}\ \{\ y = x!\ \}$$

例

Fact:

y:=1;**while** x≠0 **do begin** y:=y*x; x:=x-1
end od

このプログラムの部分的正当性は

$$\cancel{\{\, x \geq 0 \,\}\ \text{Fact}\ \{\, y = x! \,\}}$$

例

Fact:

y:=1;**while** x≠0 **do begin** y:=y*x; x:=x-1
end od

このプログラムの部分的正当性は

$$\cancel{\{\ x \geq 0\ \}\ \mathrm{Fact}\ \{\ y = x!\ \}}$$

ではなく

例

Fact:

y:=1;**while** x≠0 **do begin** y:=y*x; x:=x-1
end od

このプログラムの部分的正当性は

$$\cancel{\{\ x \geq 0\ \}\ \mathrm{Fact}\ \{\ y = x!\ \}}$$

ではなく

$$\{\ x = x_0 \wedge x_0 \geq 0\ \}\ \mathrm{Fact}\ \{\ y = x_0!\ \}$$

例

Fact:

y:=1;**while** x≠0 **do begin** y:=y*x; x:=x-1

end od

このプログラムの部分的正当性は

~~$\{ x \geq 0 \}$ Fact $\{ y = x! \}$~~

ではなく

$\{ x = x_0 \wedge x_0 \geq 0 \}$ Fact $\{ y = x_0! \}$

論理変数(logical variable)

演習

以下を証明せよ．ただしx, yは自然数とする.

{x=x_0∧y=1} **while** x≠0 **do begin** y:=y*x; x:=x-1 **end**{y=x_0!}