# 一階述語論理

# (The first-order predicate logic)

- 個体(individual)に関する性質を述語(predicate)として扱う論理
  - 例

    S(x): xは学生，I(x): xは教師，Y(x, y): xはyより若い

    S, I, Y: 述語記号，x:変数

    $\forall x(S(x) \supset (\exists y(I(y) \wedge Y(x, y))))$

    全ての学生には自分より年上の教師がいる

    (全てのxは，もしxが学生ならば，ある教師yがいてxはyより若い

    B(x): xは鳥である，F(x): xは飛べる

    $\neg(\forall x(B(x) \supset F(x)))$　全ての鳥は飛べる訳ではない

    $\exists x(B(x) \wedge \neg F(x))$でも同じ

# 構文法(syntax)

- 語彙(vocabulary)
  - P: 述語記号全体の集合
  - F: 関数記号全体の集合
  - C: 定数全体の集合
  - V: 変数全体の集合

- 項(term)
  - 変数は項
  - 定数は項
  - $t_1, \ldots, t_n$が項であり，$f$が$n$引数の関数記号のとき
    $f(t_1, \ldots, t_n)$は項

- 命題(論理式: formula)
  - $t_1, \ldots, t_n$が項であり，$p$が$n$引数の述語記号のとき，
    $p(t_1, \ldots, t_n)$は命題
  - $\varphi_1, \varphi_2$が命題で$x$が変数のとき，$(\neg\varphi_1)$，$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$，
    $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$，$(\varphi_1 \supset \varphi_2)$，$(\forall x \varphi_1)$，$(\exists x \varphi_1)$は命題
    - $\forall$，$\exists$を量記号(quantifier)とよぶ.

かっこは適宜省略する．　記号の結合の強さは

- $\neg$，　$\forall x$，　$\exists y$が一番強い
- その次に$\wedge$，　その次に$\vee$
- $\supset$が一番弱い

例

$A(x) \vee B(x) \wedge \forall y(C(x, y) \supset D(y))$は

$(A(x) \vee ( B(x) \wedge (\forall y(C(x, y) \supset D(y)) ) ) )$の略記

例題

x, yの範囲を自然数に限定して考える

- $\forall x \exists y (x=2y \vee x=2y-1)$
- $\exists y \forall x (x=2y \vee x=2y-1)$
- $\forall y \exists x (x=2y \vee x=2y-1)$
- $\exists x \forall y (x=2y \vee x=2y-1)$

はそれぞれどのような意味であるか.

またどれが正しくてどれは間違っているか.

1. Use the predicates

$$\begin{aligned} A(x,y): &\quad x \text{ admires } y \\ B(x,y): &\quad x \text{ attended } y \\ P(x): &\quad x \text{ is a professor} \\ S(x): &\quad x \text{ is a student} \\ L(x): &\quad x \text{ is a lecture} \end{aligned}$$

and the nullary function symbol (constant)

$$m: \quad \text{Mary}$$

to translate the following into predicate logic:

(a) Mary admires every professor.
(The answer is not $\forall x\, A(m, P(x))$.)

(b) Some professor admires Mary.

(c) Mary admires herself.

(d) No student attended every lecture.

(e) No lecture was attended by every student.

(f) No lecture was attended by any student.

2. Use the predicate specifications

$$\begin{aligned} B(x,y):&\quad x \text{ beats } y \\ F(x):&\quad x \text{ is an (American) football team} \\ Q(x,y):&\quad x \text{ is quarterback of } y \\ L(x,y):&\quad x \text{ loses to } y \end{aligned}$$

and the constant symbols

$$\begin{aligned} c:&\quad \text{Wildcats} \\ j:&\quad \text{Jayhawks} \end{aligned}$$

to translate the following into predicate logic.

(a) Every football team has a quarterback.

(b) If the Jayhawks beat the Wildcats, then the Jayhawks do not lose to every football team.

(c) The Wildcats beat some team, which beat the Jayhawks.

# 部分式(subformula)

# 出現(occurrence)

命題φを構成する過程で現れる命題をその命題の部分式という.

例:

φを$A(x) \vee B(x) \wedge \forall y(C(x, y) \supset D(y))$とする.

φの部分式は

$A(x)$, $B(x)$, $C(x, y)$, $D(y)$
$C(x, y) \supset D(y)$
$\forall y(C(x, y) \supset D(y))$
$B(x) \wedge \forall y(C(x, y) \supset D(y))$
$A(x) \vee B(x) \wedge \forall y(C(x, y) \supset D(y))$

# 自由変数(free variable)と
# 束縛変数(bound variable)

φを命題とする.

φにおけるxの出現が量記号∀, ∃のスコープにあるとき

そのxの出現は束縛されているといい,

そうでなければ自由であるという.

# 代入(substitution)

- A[t/x]
  - 論理式A中の自由変数xを全て項tで置き換えた論理式
- 例
  - Aを$x=2 \lor y=3x$とし，tを$y+2$とする.
  - このとき A[t/x]，すなわち A[y+2/x] は$y+2=2 \lor y=3(y+2)$となる.

- 例
  - Bを$\exists x(x=2 \vee y=x+1) \wedge x>0$とし，tを$y+2$とする.
  - このとき B[t/x]，すなわち B[y+2/x] は
    $\exists x(x=2 \vee y=x+1) \wedge y+2>0$となる.

- 例
  - Cを$\exists y(x=2 \vee y=x+1) \wedge x>0$とし，uを$y+2$とする.
  - このとき C[u/x]，すなわち C[y+2/x] は
    $\exists y(y+2=2 \vee y=y+2+1) \wedge y+2>0$とならない.

- 何故か．束縛変数と同じ変数を代入してはいけない．
- どうするか．束縛変数名を変更する．
- 例：
  - $C : \exists y(x=2 \vee y=x+1) \wedge x>0$,　$t : y+2$のとき
  - Cは $\exists z(x=2 \vee z=x+1) \wedge x>0$と同じなので
  - (アルファ同値)
  - $C[t/x]$,　すなわち $C[y+2/x]$ は$\exists z(y+2=2 \vee z=y+2+1) \wedge y+2>0$.

# 意味(semantics)

- D: 領域(universe): 空でない集合;変数や定数の値
- ρ: 附値(assignment): 変数の集合Varから領域Dへの関数
- Ω={true, false}:真理値集合
- M: モデル(Model)

  以下の関数を定めることにより

  一つのモデルMが確定する

  - n引数関数記号fに対して$f^M: D^n \to D$
  - n引数述語記号pに対して$p^M: D^n \to \Omega$

- 項や命題の意味はモデルMおよび附値ρに依存する.
- $M[t]_\rho$ : 項tの意味　項の構造による帰納的定義
  - tが変数xのとき $M[t]_\rho=\rho(x)$
  - tが$f(t_1, \ldots, t_n)$のとき, $M[t]_\rho=f^M(M[t_1]_\rho, \ldots, M[t_n]_\rho)$

- $M[\varphi]_\rho$ : 命題φの意味　命題の構造による帰納的定義
  - φが$p(t_1, \ldots, t_n)$のとき，$M[\varphi]_\rho = p^M(M[t_1]_\rho, \ldots, M[t_n]_\rho)$
  - φが$\neg\varphi_1$のとき，$M[\varphi]_\rho$は$M[\varphi_1]_\rho$がfalseのときのみtrue, その他はfalse
  - φが$\varphi_1 \wedge \varphi_2$のとき，$M[\varphi]_\rho$は$M[\varphi_1]_\rho$も$M[\varphi_2]_\rho$もtrueのときのみtrue, その他はfalse
  - φが$\varphi_1 \vee \varphi_2$のとき，$M[\varphi]_\rho$は$M[\varphi_1]_\rho$または$M[\varphi_2]_\rho$がtrueのときのみtrue, その他はfalse
  - φが$\varphi_1 \supset \varphi_2$のとき，$M[\varphi]_\rho$は$M[\varphi_1]_\rho$がtrueである限り$M[\varphi_2]_\rho$もtrueのときのみtrue, その他はfalse

- $\rho[v/x]$: 附値$\rho$に対して，$x$の割当のみ$v \in D$にかえたもの
  すなわち，

$$\rho[v/x](y) = \begin{cases} \rho(y) & \text{if } x \neq y \\ v & \text{if } x = y \end{cases}$$

  - $\varphi$が$\forall x \varphi_1$のとき，$M[\varphi]_\rho$はどんな$v$に対しても$M[\varphi_1]_{\rho[v/x]}$が$true$のときのみ$true$, その他は$false$
  - $\varphi$が$\exists x \varphi_1$のとき，$M[\varphi]_\rho$は$M[\varphi_1]_{\rho[v/x]}$が$true$になる$v$が存在するときのみ$true$, その他は$false$

- $M,\rho|=\varphi$
  - 命題$\varphi$がモデルMと附値$\rho$で**充足可能**(satisfiable)
    - 定義

      $M,\rho|=\varphi \quad \Leftrightarrow \quad M[\varphi]_\rho=\mathrm{true}$

- $|=\varphi$
  - 命題$\varphi$が恒真(valid)
    - 定義

      $|=\varphi \quad \Leftrightarrow$ どんな $M,\rho$についても $M,\rho|=\varphi$

# 形式的体系 (formal system)

- 公理
  - 妥当(valid)な命題
- 推論規則
  - 一つ以上の妥当な命題から
    他の妥当な命題への写像
- 命題が証明可能(provable)，演繹可能(deducible)
  - 公理，推論規則の適用の繰り返し(証明(proof))から
    得られる命題

# 推論規則

## NK(自然演繹法)

公理 排中律 $\neg A \vee A$

$$(\wedge I)\ \frac{A \quad B}{A \wedge B} \qquad (\wedge E)\ \frac{A \wedge B}{A} \quad \frac{A \wedge B}{B} \qquad (\vee I)\ \frac{A}{A \vee B} \quad \frac{B}{A \vee B} \qquad (\vee E)\ \frac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ C\end{matrix}}{C}$$

$$(\supset I)\ \frac{\begin{matrix}[A]\\ B\end{matrix}}{A \supset B} \qquad (\supset E)\ \frac{A \supset B \quad A}{B} \qquad (\neg I)\ \frac{\begin{matrix}[A]\\ \bot\end{matrix}}{\neg A} \qquad (\neg E)\ \frac{\neg A \quad A}{\bot} \qquad (\bot E)\ \frac{\bot}{A}$$

$$(\forall I)\ \frac{A[a]}{\forall x A[x]} \qquad (\forall E)\ \frac{\forall x A[x]}{A[t]} \qquad (\exists I)\ \frac{A[t]}{\exists x A[x]} \qquad (\exists E)\ \frac{\exists x A[x] \quad \begin{matrix}[A[a]]\\ C\end{matrix}}{C}$$

a: eigenvariable
A[x]にもA[a]が依存する仮定にも
現れない

t: term

a: eigenvariable
A[x]にもCにも,
A[a]が依存する仮定にも現れない