解答概要

離散構造 3,4 クラス 演習 9

出題：2011 年 2 月 9 日（水）

(1) (帰納的定義、リスト、文字列)

(a) 集合 A を

- $1 \in A$
- $2|n \wedge n \in A \Rightarrow n+2 \in A$
- $2 \not| n \wedge n \in A \Rightarrow n+1 \in A$

により帰納的に定義する。この A はどのような集合となるか説明せよ。

(解答)

まず、基礎により、1 が A の要素となる。次に、帰納ステップが適用されるが、$n=1$ であるため、$2 \not| n \wedge n \in A \Rightarrow n+1 \in A$ のみが適用可能であり、$n+1=2$ が A の要素となる。この段階で、A の要素は $1, 2$ のみであり、この 2 つの要素の中で帰納ステップを適用していないのは、2 である。$n=2$ に対しては、$2|n \wedge n \in A \Rightarrow n+2 \in A$ が適用可能であり、$n+2=4$ が A の要素となる。以上、同様の帰納処理を繰り返すことにより、集合 $\{x | x = 2m \wedge m \in \mathbb{N} - \{0\}\} \cup \{1\}$ が得られる。

(b) 同一の集合を幾つかの異なる帰納的定義により表すことができることがある。問 (a) とは異なる定義により、集合 A を表せ。

(解答)

問 (a) の A は

$$
\begin{aligned}
1 &\in A && (1)\\
n &\in A \Rightarrow 2n \in A && (2)\\
2|n \wedge n &\in A \Rightarrow 2(n+1) \in A && (3)
\end{aligned}
$$

と定義することができる。

証明）　この定義により、A の全ての要素が生成されることを証明する。

まず、基礎 (1) により、1 が A の要素となることが分かる。そこで、帰納ステップ (2),(3) により、2 以上の全ての偶数が生成されることを証明する。

この証明のために、A に属する、偶数 n までの全ての偶数が与えられたとき、帰納ステップ (2),(3) により、n から $2n$ までの偶数が生成されることを示す。

- $n=2$ のとき、帰納ステップ (2) より、$2n = 4 \in A$ となり、$n(=2)$ から $2n(=4)$ までの全ての偶数が生成される。
- $n>2$ のとき、帰納ステップ (2) を適用すると $2n \in A$ となる。
  また、$n>2$ のとき、$2|n$ が成り立つため、$\frac{n}{2}$ は $2 \leq \frac{n}{2} < n$ を満たす偶数であり、$\frac{n}{2}$ から n までの偶数が A に存在することになる。そこで、これら $\frac{n}{2}$ から n までの偶数から $n+2$ から $2n-2$ までの偶数が生成されることを示す。
  - $\frac{n}{2}$ に対して、帰納ステップ (2) を適用すると $2(\frac{n}{2}) = n \in A$ となり、帰納ステップ (3) を適用すると、$2(\frac{n}{2}+1) = n+2 \in A$ となる。

- $\frac{n}{2}+2$ に対して、帰納ステップ (2) を適用すると $2(\frac{n}{2}+2)=n+4\in A$ となり、帰納ステップ (3) を適用すると $2(\frac{n}{2}+2+1)=n+6\in A$ となる。
- $\frac{n}{2}+4$ に対して、帰納ステップ (2) を適用すると $2(\frac{n}{2}+4)=n+8\in A$ となり、帰納ステップ (3) を適用すると $2(\frac{n}{2}+4+1)=n+10\in A$ となる。
- 同様の処理を繰り返していくと、$n-2$ のとき、帰納ステップ (2) を適用すると $2(n-2)=2n-4\in A$ となり、帰納ステップ (3) を適用すると $2(n-2+1)=2n-2\in A$ となる。

このように、A に属する、偶数 n までの全ての偶数が与えられたとき、n から $2n$ までの偶数が生成され、$2n$ が偶数であるため、$2n$ までの全ての偶数から、更に、$2n$ から $4n$ までの偶数が生成される。以上の処理を繰り返すことにより、2 以上の全ての偶数が生成されることが分かる。

(2) (集合の帰納的定義)
回文とは「しんぶんし」「わたしまけましたわ」のように、上下どちらから読んでも同じ文 (語) のことである。$\Sigma=\{a,b,c\}$ 上の回文の集合 P を帰納的に定義せよ。ただし、空文字列 Λ も回文であるとする。

(解答)

解答の一例を示す。

- $\Lambda\in P$.
- $x\in\Sigma\Rightarrow x\in P$.
- $s\in P\wedge x\in\Sigma\wedge s=x\Rightarrow xx, xsx\in P$.
- $s\in P\wedge x\in\Sigma\wedge s\neq x\Rightarrow xsx\in P$.

(3) (関数の帰納的定義) リストを反転する関数 reverse: $List_A\to List_A$ の定義を与えよ.

(解答)

$$\texttt{reverse}(L)=\begin{cases}\langle\rangle & (L=\langle\rangle\text{ のとき})\\ \texttt{reverse}(M)\ \oplus\ \mathrm{cons}(y,\langle\rangle) & (L=\mathrm{cons}(y,M)\text{ のとき})\end{cases}$$

ここで、$\mathrm{cons}(y,\langle\rangle)$ は、長さ 1 のリストとして $\langle y\rangle$ と書いてもよい。