離散構造 3,4 クラス 期末試験　解答

2011 年 2 月 18 日 (金)

問 1 (論理)

(1) 命題論理に関して、以下のそれぞれの文が命題であるか否かを示した上で、命題である場合、その真偽を示せ。但し、命題であることの理由を記載する必要はないが、命題の真偽の理由は明記すること。以下の文での A, B, C はいずれも命題である。

[解答]

(i) 「野球の World Baseball Classic の日本代表」
命題でない。

(ii) 「(野球の World Baseball Classic $\vee$ サッカーの World Cup) $\wedge$ 日本代表」
命題でない。

(iii) 「A と B が同値ならば、$A \vee \neg B$ は常に真となる。」
命題である。
$A \vee \neg B$ の真理値表は

A	B	$\neg B$	$A \vee \neg B$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

であるが、A と B が同値ならば、A と B の真偽が異なる第 2 行目と第 3 行目の場合は発生せず、$A \vee \neg B$ は、A と B が共に真のとき真に、共に偽のとき真になる。よって、この問の命題は真である。

(iv) 「$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow C$ が恒真式であるならば、C が偽のときに、A は必ず偽でなくてはいけない。」
命題である。
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow C$ が恒真式であるならば、C が偽のときに、$(A \Rightarrow B)$ は必ず偽でなくてはいけない。
$(A \Rightarrow B)$ は、A が真であっても B が偽ならば、偽となるため、この問の命題は偽である。

(2) 述語論理に関して、次の問に答えよ。但し、集合 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x \leq 100\}$ とする。

(a) 以下の文が正しいか、誤りかを答えると共に、その理由も示せ。

任意の述語 $Q(x), R(x)$ に対して、$(\exists x Q(x) \wedge \exists x R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge R(x))$ が成り立つ。

[解答]

誤り。
$Q(x)$ を満たす x と $R(x)$ を満たす x が異なるとき、$(\exists x Q(x) \wedge \exists x R(x))$ を満たすが $\exists x(Q(x) \wedge R(x))$ を満たさず、$(\exists x Q(x) \wedge \exists x R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge R(x))$ が成り立たない。

(b) $\forall x{\in}A\ \exists y{\in}A(x \leq y)$ と $\exists y{\in}A\ \forall x{\in}A(x \leq y)$ が同じ意味を持つか否かを理由と共に示せ。

[解答]

同じ意味を表さない。
A のどの値 x に対しても、$y \in \{u \in \mathbb{N} \mid x \leq u \leq 100\}$ は、$x \leq y$ を満たすため、$\forall x{\in}A\ \exists y{\in}A(x \leq y)$ は真となる。一方、$y = 100 \in A$ だけが、A のどの値 x に対しても $x \leq y$ を満たし、$\exists y{\in}A\ \forall x{\in}A(x \leq y)$ は真となる。以上の様に、両方共に真となる命題であるが、異なる意味を表している。

問 2 (関係、証明技法)

ある集合 T 上の順序 R において、最小元が極小元でもあることを、集合 T 上の順序 R の最小元 t が極小元でないという仮定から始まる背理法により証明せよ。

[解答]

集合 T 上の順序 R の最小元 t が極小元でないと仮定すると、集合 T 上の順序 R において t が極小元であることの定義

$$\forall \tilde{t} \in T\ (\tilde{t} R t \Rightarrow \tilde{t} = t) \tag{1}$$

を否定した

$$\exists \tilde{t} \in T\ (\tilde{t} R t \wedge \tilde{t} \neq t) \tag{2}$$

が成り立つ。また、t が最小元であることより、

$$\forall x \in T\ (t R x) \tag{3}$$

が成り立つ。式 (2) を満たす $\tilde{t}$ について、式 (2) より $\tilde{t} R t$ を、式 (3) より $t R \tilde{t}$ を導ける。つまり、式 (2) の $\tilde{t}$ は、$t R \tilde{t} \wedge \tilde{t} R t$ を満たし、順序 R が反対称的であることより、$t = \tilde{t}$ が得られる。しかし、これは、式 (2) の $\tilde{t} \neq t$ に矛盾し、仮定が誤りであることが分かる。よって、T 上の順序 R における最小元は極小元でもある。

問 3 (集合, 関数)

$|X| \geq 1$ である任意の有限集合 X に対して、関数 f_X を $f_X : X \to 2^X, f_X(x) = X - \{x\}$ と定義する。同様に、$|Z| \geq 1$ である任意の有限集合 Z に対して、関数 g_Z を $g_Z : Z \to 2^{2^Z}, g_Z(z) = 2^{Z - \{z\}}$ と定義する。このとき、以下の問に答えよ。但し、$|X|$ は集合 X の要素数を表す。

(a) 集合 A を $A = \{1, 2, 3\}$ としたとき、$f_A(2)$ と $g_A(3)$ をそれぞれ求めよ。

[解答]

$f_A(2) = \{1, 2, 3\} - \{2\} = \{1, 3\}$.

$g_A(3) = 2^{\{1,2,3\} - \{3\}} = 2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

(b) $|X| \geq 1$ である任意の有限集合 X に対して、f_X と g_X のそれぞれが全射であるか否か、および、単射であるか否かを理由と共に示せ。

[解答]

f_X は全射でないが、単射である。

$X \in 2^X$ であるが、如何なる $x \in X$ に対しても $f_X(x) = X - \{x\} \neq X$ であるため、全射でない。

f_X が単射でなく、異なる $x_1, x_2 \in X$ において $f_X(x_1) = f_X(x_2)$ とすると、$X - \{x_1\} = X - \{x_2\}$ である。しかし、この 2 つの等しい集合において、差集合の定義より、$x_2 \in X - \{x_1\} \wedge x_2 \notin X - \{x_2\}$ であり、矛盾が導ける。よって、f_X は単射である。

g_X は全射でないが、単射である。

$2^X \in 2^{2^X}$ であるが、如何なる $x \in X$ に対しても $g_X(x) = 2^{X - \{x\}} \neq 2^X$ であるため、全射でない。

g_X が単射でなく、異なる $x_1, x_2 \in X$ において $g_X(x_1) = g_X(x_2)$ とすると、$2^{X - \{x_1\}} = 2^{X - \{x_2\}}$ である。しかし、この 2 つの等しい集合において、べき集合と差集合の定義より、$x_1 \in X - \{x_2\} \notin 2^{X - \{x_1\}} \wedge X - \{x_2\} \in 2^{X - \{x_2\}}$ であり、矛盾が導ける。よって、g_X は単射である。

問 4 (関係)

つくばエクスプレスの快速が停車する駅名は、つくば駅より順に、

つくば、守谷、流山おおたかの森、南流山、北千住、南千住、浅草、新御徒町、秋葉原

であり、これらの駅名を要素とする集合を A とする。同様に、つくばエクスプレスの区間快速が停車する駅名は、つくば駅より順に、

つくば、研究学園、万博記念公園、みどりの、みらい平、守谷、柏の葉キャンパス、
流山おおたかの森、南流山、三郷中央、八潮、北千住、南千住、浅草、新御徒町、秋葉原

であり、これらの駅名を要素とする集合を B とする。このとき、以下の問に答えよ。但し、自然数の集合 $\mathbb{N}$ は 0 を含むとする。

(a) $m \in \mathbb{N}$ を用いた B 上の関係 S_m を

$$xS_my \Leftrightarrow (\text{つくば発の区間快速において、}x\text{ の }m\text{ 駅だけ前の停車駅が }y\text{ である})$$

とする。このとき、関係 S_1, S_0 がそれぞれ、順序であるか否かを理由と共に示せ。そして、順序である場合は、全順序であるか半順序であるかを示せ。

[解答]

S_0 や S_1 が順序であるためには、反射律、推移律、反対称律が成り立たなければならない。

以下のように、S_1 は反射律と推移律が成立しないため、順序でない。

(反射律) 駅 $x \in B$ の 1 駅前は x ではないため、反射律は成り立たない。

(推移律) 駅 $x \in B$ の 1 駅前が駅 $y \in B$ であり、y の 1 駅前が駅 $z \in B$ であれば、z は x の 2 駅前であり、z は x の 1 駅前ではないため、推移律は成り立たない。

(反対称律) いずれの駅 $x, y \in B$ に対しても、xS_1y と yS_1x が同時に成立することはないため、反対称律は必ず成立する。

S_0 は反射律と推移律と反対称律が成立するため、順序である。

(反射律) 駅 $x \in B$ の 0 駅前は x であるため、反射律は成り立つ。

(推移律) 駅 $x \in B$ の 0 駅前が駅 $y \in B$ であり、y の 1 駅前が駅 $z \in B$ であると、x と y と z は同じであり、x の 0 駅前は z である。よって、推移律が成り立つ。

(反対称律) いずれの駅 $x, y \in B$ に対しても、xS_0y と yS_0x が同時に成立するならば、$x = y$ であり、反対称律は必ず成立する。

また、$x \neq y$ となる駅 $x, y \in B$ 同士では、xS_0y を満たさないため、半順序である。

(b) $m \in \mathbb{N}$ を用いた B 上の関係 S'_m を

$$xS'_my \Leftrightarrow (\text{つくば発もしくは秋葉原発の区間快速において、}x\text{ の }m\text{ 駅だけ前の停車駅が }y\text{ である})$$

とする。このとき、関係 S'_2 が同値関係であるか否かを理由と共に示せ。

[解答]

S'_2 が同値関係であるためには、反射律、対称律、推移律が成り立たなければならない。

以下のように、S'_2 は反射律と推移律を満たさず、同値関係でない。

(反射律) つくば発であろうと秋葉原発であろうと、駅 $x \in B$ の 2 駅前が x であることはないため、反射律は成立しない。

(対称律) つくば発の区間快速において、駅 $x \in B$ の 2 駅前が駅 $y \in B$ であるとき、秋葉原発の区間快速において、y の 2 駅前が x である。同様に、秋葉原発の区間快速において、x の 2 駅前が y であるとき、つくば発の区間快速において、y の 2 駅前が x である。よって、対称律は成立する。

(推移律) 以下の表のように、xS'_2y と yS'_2z の出発駅のいずれの組み合わせにおいても、つくば発の区間快速と秋葉原発の区間快速の両方において、駅 $x \in B$ の 2 駅前が駅 $z \in B$ となることはない。よって、推移律は成立しない。

xS'_2y を成り立たせる区間快速の出発駅	yS'_2z を成り立たせる区間快速の出発駅	xS'_2z の成立/不成立 (理由)
つくば	つくば	不成立 (xS'_4z がつくば発で成立)
つくば	秋葉原	不成立 (xS'_0z が成立)
秋葉原	つくば	不成立 (xS'_0z が成立)
秋葉原	秋葉原	不成立 (xS'_4z が秋葉原発で成立)

(c) $n \in \mathbb{N}$ を用いた A, B 上の関係 R_n を

$$xR_ny \Leftrightarrow (\text{つくば発の快速において、} x \text{ の } n \text{ 駅だけ後の停車駅が } y \text{ である})$$

とする。このとき、関係の合成 $R_5 \circ S_2$ の要素の中で $A \times A$ に属する組をつくば駅側から順に全て列挙せよ。

[解答]

$x(R_5 \circ S_2)y$ は、つくばから秋葉原へ向かう快速に駅 x で乗り込み、5 駅先の駅で降りた後に、秋葉原発の区間快速で 2 駅戻ったときに到着する駅が y であることを表している。

$$R_5 \circ S_2 = \{\langle\,\text{つくば}, \text{八潮}\,\rangle, \langle\,\text{守谷}, \text{北千住}\,\rangle, \langle\,\text{流山おおたかの森}, \text{南千住}\,\rangle, \langle\,\text{南流山}, \text{浅草}\,\rangle\}$$

であるが、八潮は A に属さないため、$A \times A$ に属する合成関係 $R_5 \circ S_2$ の要素は、つくば駅側から順に、

$$\langle\,\text{守谷}, \text{北千住}\,\rangle, \langle\,\text{流山おおたかの森}, \text{南千住}\,\rangle, \langle\,\text{南流山}, \text{浅草}\,\rangle$$

である。

問 5 (グラフ, 帰納的定義)

節に集合 A の要素が 1 つ付いている 2 分木の集合 $\mathrm{BinTree}_A$ を

- $\circ \in \mathrm{BinTree}_A$
- $(x \in A \wedge L \in \mathrm{BinTree}_A \wedge R \in \mathrm{BinTree}_A) \Rightarrow \langle L, x, R\rangle \in \mathrm{BinTree}_A$
- $(x \in A \wedge L \in \mathrm{BinTree}_A) \Rightarrow \langle L, x\rangle \in \mathrm{BinTree}_A$

と定義する。このとき、$\mathbb{N}$ の要素をラベルとするラベル付き 2 分木が与えられて、その木の高さを返す関数 $Dept : \mathrm{BinTree}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ の定義を示せ。なお、与えられた n 個の要素の集合の中から、最大となる値を出力する関数 max_n を利用してよい。

[解答]

この関数は、

$$Dept(T) = \begin{cases} 0 & (T = \circ\text{のとき}) \\ max_2\big(Dept(L), Dept(R)\big) + 1 & (T = \langle L, x, R\rangle \in \mathrm{BinTree}_{\mathbb{N}}\text{のとき}) \\ Dept(L) + 1 & (T = \langle L, x\rangle \in \mathrm{BinTree}_{\mathbb{N}}\text{のとき}) \end{cases}$$

と帰納的に定義可能である。

問 6 (帰納的定義, 帰納法)

ある集合 A のリストの集合 $List_A$ に関して、リストを反転して出力する関数 $reverse : List_A \to List_A$ に関する以下の説明文中の空欄となっている括弧 (括弧 (a) ～括弧 (g)) に記載すべき内容を示せ。

(a) 関数 $reverse$ は、

$$reverse(L) = \begin{cases} \langle\ \ \rangle & (L = \boxed{\quad (a) \quad} \text{のとき}) \\ \boxed{\quad (b) \quad} \oplus cons(y, \langle\ \ \rangle) & (L = cons(y, M) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と帰納的に定義可能である。

(b) 上記の問 (a) の定義を定義 $(*)$ とする。この定義 $(*)$ により $List_A$ の任意のリストを反転して出力することができることは以下のように証明できる。

[証明]

定義 $(*)$ を用いた関数 $reverse'$ を

$$reverse'(L) = \begin{cases} \langle\ \ \rangle & (L = \boxed{\quad (a) \quad} \text{のとき}) \\ \boxed{\quad (c) \quad} \oplus cons(y, \langle\ \ \rangle) & (L = cons(y, M) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する。リストを反転する関数 $reverse$ がこの $reverse'$ になることを示す。

(基礎): $L = \boxed{\quad (d) \quad}$ のとき、L にリストの反転処理を行っても、$\langle\ \ \rangle$ であり、$reverse(L) = \boxed{\quad (e) \quad}$ である。一方、$reverse'$ の定義より、$reverse'(L) = \boxed{\quad (a) \quad}$ であり、入力 $L = \boxed{\quad (d) \quad}$ に対して、$reverse'$ は正しいリストを出力する。

(帰納ステップ): $L = N \in List_A$ のとき、$\boxed{\quad (f) \quad}$ が成り立つとする。L が $N \in List_A$ と A の任意の要素 a を用いて $L = \boxed{\quad (g) \quad}$ と表されるとき、

$$\begin{aligned} & reverse(L) \\ = \ & reverse(N) \oplus \langle a \rangle \\ = \ & reverse'(N) \oplus cons(a, \boxed{\quad (d) \quad}) \\ = \ & reverse'(L) \end{aligned}$$

と変形可能であり、入力 $L = \boxed{\quad (g) \quad}$ に対して、$reverse'$ は正しいリストを出力する。

よって、$reverse'$ は $List_A$ の任意のリストの反転を出力するため、$reverse$ の定義といえる。 ¶

[解答]

(a) $\langle\ \ \rangle$ (b) $reverse(M)$ (c) $reverse'(M)$ (d) $\langle\ \ \rangle$ (e) $\langle\ \ \rangle$ (f) $reverse(L) = reverse'(L)$
(g) $cons(a, N)$