

『論理と形式化』資料 No.4
意味論(つづき)と標準形
亀山幸義 (kam[at]cs.tsukuba.ac.jp)

1 一階述語論理の解釈の例 (異なる言語 L_2 に対して)

先週の資料では、解釈をする際の対象として、特定の言語 L_1 を選んだ。 L_1 は、自然数をモデル化することを念頭に
した言語であり、定数 0、関数記号 s (1 引数), $+$, $*$ (2 引数)、述語記号 $=$ (2 引数) を持っていた。

それでも、定数、関数記号、述語記号の解釈は「何でもよい」ものなので、十分に一般的な解釈の話となっていたのだ
が、どうしても $+$ や $=$ という記号には、我々がもっている「直感的な意味」があるので、かえってわかりにく面もあっ
たとおもう。($+$ を「引き算」として解釈する、といわれても、不思議だっただろう。)

そこで、今回は、少しだけ抽象的にして、「関数記号 f (1 引数)、述語記号 P (2 引数) がある言語 L_2 」で、解釈をし
てみよう。

解釈の対象となる論理式は、以下の 2 つである。

- 論理式 $A: (\forall x. P(x, f(x))) \supset (\forall x. P(x, f(f(x))))$.
- 論理式 $B: \forall x. \forall y. \forall z. ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \supset P(x, z))$.

言語 L_2 に対する解釈 I_ρ^1 :

- 領域 $D = \mathbb{N}$ とする。
- 付値 ρ : すべての変数に対して、0 を割り当てる。つまり、 $\rho(x) = 0$ である。(実は、今回の論理式 A, B のよ
うに、自由変数を持たない論理式の解釈は、 ρ には依存しない。どんな ρ を取っても同じである。)
- 関数記号の解釈: $f(x) = x + 6$ とする。
- 述語記号の解釈: $u, v \in \mathbb{N}$ に対して、 $P(u, v)$ の解釈は、 $|u - v|$ が 3 で割り切れるとき真、そうでないとき偽
とする。

この解釈のもとで、論理式 A, B はともに真となる。

演習問題 1. このことを確認せよ。

言語 L_2 に対する解釈 I_ρ^2 :

- 領域 D , 付値 ρ , 関数記号 f の解釈は I^1 と同じ。
- 述語記号の解釈: $u, v \in \mathbb{N}$ に対して、 $P(u, v)$ の解釈は、 $|u - v| \leq 20$ のとき真、そうでないとき偽とする。

この解釈のもとで、論理式 A は真であるが、 B は偽となる。

演習問題 2. このことを確認せよ。

演習問題 2a (授業後に追加). 論理式 A を偽にする解釈を与えよ。(ヒント: I_ρ^2 における P の解釈を、わずかに修正す
ると得られる。)

2 標準形

論理式の標準形 (normal form) というのは、特定の形をした論理式のことであり、その形に限定することによって、
様々な処理がやりやすくなることを目的としている。

この場合、標準形ではない論理式を標準形に変換する、という手続き (あるいはアルゴリズム) が重要となってくる。標準形にはいろいろあるが、ここでは、重要な2つのものを簡単に見てみよう。

2.1 命題論理における論理積標準形

論理積標準形 (Conjunctive Normal Form) は、以下のように定義される命題論理の論理式のことである。

- 命題変数 (あるいは、0 引数の述語記号とおもってもよい) P 、および、それに否定記号をつけた $\neg P$ は、アトムと呼ばれる。
- アトムを有限個、 $\vee$ でつないだ論理式を「節 (clause)」と呼ぶ。
- 節を有限個、 $\wedge$ でつないだ論理式を、論理積標準形と呼ぶ。

たとえば、 $(P \vee \neg Q \vee \neg P) \wedge (\neg R \vee Q)$ は論理積標準形 (CNF) である。

定理: どんな命題論理式 A に対しても、それと論理的に同値な CNF が存在する。(つまり、その CNF を C とすると、 $A \Leftrightarrow C$ が、NK で証明可能である。)

証明: 以下の変形をすればよい。

- $\supset$ と $\Leftrightarrow$ を、定義にしたがって除去する。 $(A \supset B)$ は $(\neg A) \vee B$ と同値、 $A \Leftrightarrow B$ は $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ と同値)
- $\neg$ を一番内側に移動する。 $(\neg(A \wedge B))$ は $(\neg A) \vee (\neg B)$ と同値などの法則を使う。)
- $\wedge$ を一番外側に移動する。 $((A \wedge B) \vee C)$ は $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$ と同値などの法則を使う。)

演習問題 3: $\neg(P \vee ((\neg Q) \wedge R))$ を同値な CNF に変形せよ。

なお、ここでは、論理積標準形のみを扱ったが、論理和標準形 (Disjunctive Normal Form) というものもある。

2.2 一階述語論理における冠頭標準形

冠頭標準形 (Prenex Normal Form) は、以下のように定義される一階述語論理の論理式のことである。

- $\forall$ と $\exists$ のない論理式を、quantifier-free の論理式という。
- quantifier-free の論理式の外側に、 $\forall$ や $\exists$ を有限個つけた論理式を冠頭標準形という。

たとえば、 $\forall x.\exists y.(P(x) \vee \neg Q(x, y) \vee \neg P(f(y)))$ は冠頭標準形 (PNF) である。

定理: どんな命題論理式 A に対しても、それと論理的に同値な PNF が存在する。

証明: まず、 $\supset$ や $\Leftrightarrow$ など除去し、 $\neg$ を「一番内側」にいれるところまでは、CNF の場合と同じである。

ただし、 $\neg(\forall x.A)$ に対しては、 $\exists x.(\neg A)$ に同値変形し、ただし、 $\neg(\exists x.A)$ に対しては、 $\forall x.(\neg A)$ に同値変形する。

次に、 $\forall$ や $\exists$ を外に出す変形をおこなう。

- $(\forall x.A) \wedge B$ は、 x が B に自由出現しないなら $\forall x.(A \wedge B)$ と同値である。
- $(\forall x.A) \wedge B$ は、 x が B に自由出現するなら、まず、使われていない新しい変数を用意する。これを y とすると、 $(\forall y.A[y/x]) \wedge B$ に変形してから、上記の変形をおこなう。
- $(\forall x.A) \vee B$ や $(\exists x.A) \vee B$ など同様である。

演習問題 4: $(\forall x.\exists y.P(x, y)) \supset (\exists y.\forall x.P(x, y))$ を PNF に同値変形せよ。同様に、 $(\exists y.\forall x.P(x, y)) \supset (\forall x.\exists y.P(x, y))$ を PNF に同値変形せよ。

2.3 スコーレム標準形 (発展な内容)

いよいよスコーレム標準形 (SNF) である。ここでは、存在型の SNF について考える。すなわち、冠頭標準形であって、 $\forall$ が使われていないもの (限量子は $\exists$ しかないもの) を存在型の SNF という。

これは、しかし、単なる同値変形ではない。論理式 A を証明したいとき、それより、ちょっと簡単で、「証明可能性が同じ」論理式 A' に変形する、というために使われる。

ここで、「 A と B が同値」であれば、当然、「 A の証明可能性と B の証明可能性は同じ」であるが、「 A の証明可能性と B の証明可能性が同じ (つまり、どちらも証明可能か、どちらも証明不能)」であったからといって、「 A と B が同値」とは限らない。(ここがちょっと難しいのであるが)

ともかく、見てみよう。

- $\exists x.\forall z.A$ の形の論理式にたいして、新しい 1 引数の関数記号 f を使って、 $\exists x.(A[f(x)/z])$ という変形をおこなう。
- $\exists x.\exists y.\forall z.A$ の形の論理式にたいして、新しい 2 引数の関数記号 g を使って、 $\exists x.(A[g(x, y)/z])$ という変形をおこなう。

一般に n 個の存在記号のあとに全称記号があるときは、 n 引数の関数記号を用意して、おきかえる。

例: $\exists x.\forall y.(P(x, y) \supset P(y, x))$ という論理式に上記変形をおこなうと、 $\exists x.(P(x, f(x)) \supset P(f(x), x))$ という論理式になる。

このような変形が、「証明可能性」(これは、「恒真性」といいかえてもよい)を保つ、というのは、ちょっと考えないとわからないが、そこは意味論の定義に照らして自分で考えてもらおう。(詳細は、たとえば、ウェブページで「参考書」に指定している、小野先生の教科書を見るよい。)ここでは、この変形が正しい(証明可能性を保存する)と仮定して、実際に変形を試みよう。

2.4 スコーレム標準形の応用 (発展な内容)

$(\forall x.\exists y.A(x, y)) \supset (\exists y.\forall x.A(x, y))$ が証明可能でない、ということを示そう。これ自体は、「ある解釈をあたえて、偽になる」ということさえ示せば OK であるが、ここでは SNF に変形してみる。

上記の論理式の変形 (まずは同値変形): $(\exists x.\forall y.\neg A(x, y)) \vee (\exists y.\forall x.A(x, y))$.

上記の論理式の変形 (さらに同値変形): $\exists x.\forall y.(\neg A(x, y) \vee (\exists y.\forall x.A(x, y)))$.

上記の論理式の変形 (さらに同値変形): $\exists x.\forall y.(\neg A(x, y) \vee (\exists v.\forall u.A(u, v)))$.

上記の論理式の変形 (さらに同値変形): $\exists x.\forall y.\exists v.\forall u.(\neg A(x, y) \vee A(u, v))$.

上記の論理式の変形 (同値変形ではなく、証明可能性だけ保存): $\exists x.\exists v.\forall u.(\neg A(x, f(x)) \vee A(u, v))$.

上記の論理式の変形 (同値変形ではなく、証明可能性だけ保存): $\exists x.\exists v.(\neg A(x, f(x)) \vee A(g(x, v), v))$.

結局、最初の論理式が証明可能かどうかということと、最後の論理式が証明可能かどうかは一致する。

ここで、最後の論理式が証明可能かどうかは、このままではわかりにくいので、その否定をとると、

$$\forall x.\forall v.(A(x, f(x)) \wedge \neg A(g(x, v), v))$$

となり、これを真とする解釈は容易につくれるので、恒偽ではない。つまり、もともとの論理式は (その否定なので) 恒真ではなく、証明可能ではなかった、ということになる。

演習問題 5: 最後の論理式 (否定をとったもの) を真とする解釈を 1 つ与えよ。たとえば、 $D = \mathbb{N}$ として、 $f(x) = x + 1$ (となるような解釈)、 $A(x, y)$ は $y = x + 1$ (となるような解釈) としてしまい、 g の解釈をどうやって与えたらよいか、考えるとよい。

演習問題 6: $(\forall x.\exists y.A(x, y)) \supset (\exists y.\forall x.A(x, y))$ の「ならば」の前後を逆にした論理式は、証明可能である。したがって、直接証明してもよいのだが、ここでは練習のため、これをスコーレム標準形に変形して、それを証明してみなさい。