

以下の論理式のうち NK の定理であるものは証明し，そうでないものはその論理式を偽とする解釈を一つ与えなさい．

1. $(A \vee B \supset C) \supset (A \supset C) \wedge (B \supset C)$

2. $(A \wedge B \supset C) \supset (A \supset C) \wedge (B \supset C)$

3. $\forall x F(x) \supset \neg \exists x \neg F(x)$

4. $\exists x F(x) \supset \neg \forall x F(x)$

5. $\exists x F(x) \supset \neg \forall x \neg F(x)$

解答案

1.

$$\frac{\frac{A \vee B \supset C}{\frac{C}{A \supset C} \text{ } 2} \quad \frac{\frac{A}{A \vee B} \text{ } 2 \quad \frac{A \vee B \supset C}{\frac{C}{B \supset C} \text{ } 3} \quad \frac{B}{A \vee B} \text{ } 3}{(A \supset C) \wedge (B \supset C)} \quad \frac{(A \vee B \supset C) \supset (A \supset C) \wedge (B \supset C)}{(A \vee B \supset C) \supset (A \supset C) \wedge (B \supset C)} \text{ } 1$$

2. A と B のどちらかが $\perp$ で他方が $\top$, C は $\perp$ の場合を考える . $\supset$ の左側は $\perp \wedge \top \supset \perp \equiv \top$ であるが右側は $(\perp \supset \perp) \wedge (\top \supset \perp) \equiv \perp$ となる .

3.

$$\frac{\frac{\frac{\forall x F(x)}{F(a)} \text{ } 1 \quad \neg F(a)}{\perp} \text{ } 3 \quad \frac{\exists x \neg F(x)}{\perp} \text{ } 2}{\neg \exists x \neg F(x)} \text{ } 2 \quad \frac{\forall x F(x) \supset \neg \exists x \neg F(x)}{\forall x F(x) \supset \neg \exists x \neg F(x)} \text{ } 1$$

4. 個体変数 x の領域全ての値 a で $F(a)$ が真であるとき , $\exists x F(x)$ は成立するが $\forall x F(x)$ でもあるためその否定は成り立たない .

5.

$$\frac{\frac{\frac{\forall x \neg F(x)}{\neg F(a)} \text{ } 2 \quad F(a)}{\perp} \text{ } 3 \quad \frac{\exists x F(x)}{\perp} \text{ } 1}{\neg \forall x \neg F(x)} \text{ } 2 \quad \frac{\exists x F(x) \supset \neg \forall x \neg F(x)}{\exists x F(x) \supset \neg \forall x \neg F(x)} \text{ } 1$$