『論理と形式化』Short Quiz

2014 年 5 月 30 日 (海野)

問題 1 論理式 $(P \vee Q) \wedge \neg P$ を真にする解釈 I を与えよ。

解答例:

$I[\![(P \vee Q) \wedge \neg P]\!]$ が真となるためには、($\wedge$ の解釈の定義より)、$I[\![P \vee Q]\!]$ と $I[\![\neg P]\!]$ が両方とも真とならなければいけない。

$I[\![\neg P]\!]$ が真なので、($\neg$ の解釈の定義より) $I[\![P]\!]$ は偽である。

$I[\![P \vee Q]\!]$ が真であることから、$I[\![P]\!]$ と $I[\![Q]\!]$ の少なくとも一方は真である。しかし、$I[\![P]\!]$ が偽なので、結局、$I[\![Q]\!]$ が真である。

以上をまとめると、I は P^I を偽とし、Q^I の解釈を真とするような解釈である。

逆に、この解釈 I のもとで、上記の論理式が真となることは容易にわかる。

問題 2 (余力のある人のみ) 言語 L_2 の解釈 I^3(スライド参照) と付値 ρ (ただし $\rho(x) = 1$) を使って以下を計算せよ。

$$I^3_\rho[\![\forall y(y - x + x = y)]\!]$$

変数 x と y は異なる変数であると理解して、この問題を解く。解釈 I^3 において領域 D は自然数の集合 $\mathtt{N}$ である。

「${I^3}_\rho[\![\forall y(y - x + x = y)]\!]$ が真」ということと、「すべての $u \in \mathtt{N}$ に対して、${I^3}_{\rho[y \mapsto u]}[\![y - x + x = y]\!]$ が真」ということは同値である。

ここで、${I^3}_{\rho[y \mapsto u]}[\![y - x + x]\!]$ を計算すると、

$$\begin{aligned}
{I^3}_{\rho[y \mapsto u]}[\![y - x + x]\!] &= {I^3}_{\rho[y \mapsto u]}[\![y]\!] - {I^3}_{\rho[y \mapsto u]}[\![x]\!] + {I^3}_{\rho[y \mapsto u]}[\![x]\!] \\
&= \rho[y \mapsto u](y) - \rho[y \mapsto u](x) + \rho[y \mapsto u](x) \\
&= u - \rho(x) + \rho(x) \\
&= u
\end{aligned}$$

同様に、${I^3}_{\rho[y \mapsto u]}[\![y]\!] = u$ である。

さらに、I^3 における $=$ の解釈は、通常の等号 ($u =^I u$ は真で、異なる u, v に対して $u =^I v$ は偽となる解釈) であるので、${I^3}_{\rho[y \mapsto u]}[\![y - x + x = y]\!]$ は真となる。

よて、「すべての $u \in \mathtt{N}$ に対して、${I^3}_{\rho[y \mapsto u]}[\![y - x + x = y]\!]$ が真」が成立するので、${I^3}_\rho[\![\forall y(y - x + x = y)]\!]$ は真である。