『論理と形式化』 資料その 2

亀山幸義 (kam[at]cs.tsukuba.ac.jp)

1 一階述語論理に対する「任意の」言語に対する意味論

前回は、一階述語論理の言語たち (それらは無限にたくさんある) のうち、特に言語 L_1 (一階の自然数論、あるいは、算術 の言語) に対する意味論をいくつか見てきた。

この場合だけ十分にわかってもらえれば、十分に応用がきくと思うが、念のため、一般的な言語 L に対する意味論をきちんと与えておく。

1.1 言語 L に対する解釈 I と付値 ρ と領域 D

言語 L が与えられたとき、それに対する 1 つの意味論は、解釈 I と付値 ρ と領域 D とで与えられる。(I と ρ と D の 3 点セットを 1 つ指定すると、意味論が 1 つ決まる。)

- 領域 D: 空でない集合。
- 付値 ρ: 言語 L のすべての変数 (無限個あるかもしれない) に対して、D の要素を対応付ける関数。なお、異なる変数に同じ要素を対応付けてもよい。
- 解釈 I: 言語 L のすべての定数、関数記号、述語記号に対して、以下のものを対応付ける関数。
  - 定数 c に対しては、領域 D の要素を 1 つ対応付ける。(異なる定数に同じ要素を対応付けてもよい。) この要素を c^I と書くことにする。(解約 I によって c に対応付くもの、をあらわす。)
  - n 引数の関数記号 f に対しては、$D^n \to D$ という関数を 1 つ対応付ける。この関数を f^I と書くことにする。
  - n 引数の述語記号 P に対しては、$D^n \to \{\text{真}, \text{偽}\}$ という関数を 1 つ対応付ける。この関数を P^I と書くことにする。

定数に対応するのが (集合 D の) 要素であり、関数記号に対応するのが (集合 D の要素を引数にとり集合 D の要素を返す) 関数である。これらは非常に自然な話であろう。

述語記号に対応するのが、「関数」であるのはちょっと違和感があるかもしれない。先週の解釈 I^1 では、$=$ という述語記号の解釈を以下のように与えた。

> $=$ の解釈は、D の要素として等しいとき真で、そうでないとき偽とする。

これを、この資料の言葉で書きなおす。すると、I^1 における $=$ の解釈 $=^{I^1}$ は、以下のような関数 eq として与えられる。(ここで、解釈 I^1 の前提として、領域 D が自然数の集合であることを思いだそう)。

$$\mathrm{eq}(i,j) = \begin{cases} \text{真} & \text{if } i = j \\ \text{偽} & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

ここで eq は D の要素を 2 つ引数としてもらい、それらが等しければ真を返し、それらが等しくなければ偽を返す関数である。つまり $\mathrm{eq} : D \times D \to D$ となっていて、確かに関数である。

これが、先週の資料で与えた解釈と (本質的に) 一致することはわかるであろう。

1.2 言語 L に対する、I, ρ, D に関する論理式 F の意味

さて、I, ρ, D の 3 点セットが与えられれば、言語 L における項や論理式に対する意味が定まる。その決め方をこの章で紹介する。

X を項や論理式とするとき、「I, ρ, D のもとでの意味」を $I_\rho[\![X]\!]$ と書くことにする。これは、本来ならば、$I_{\rho,D}[\![X]\!]$ のように、D もパラメータとして書くべきだが、パラメータが 3 つもあると非常に見づらくなることと、D は 1 回決めると固定してしまい、定義の中では変化しないので、この章では省略してしまうことにした。

1. 項の意味 $I_\rho[\![t]\!]$ は以下のように定める。(これは、D の要素となる。)
   - 変数 x の意味: $I_\rho[\![x]\!] = \rho(x)$. (変数 x をどう対応付けるかは、ρ で決めたので、そのままそれを使う。)
   - 定数 c の意味: $I_\rho[\![c]\!] = c^I$. (定数 c をどう対応付けるかは、I で決めたので、そのままそれを使う。)
   - 項 $f(t_1, \cdots, t_n)$ の意味 (ただし f がアリティ n であるとする) :

$$I_\rho[\![f(t_1, \cdots, t_n)]\!] = f^I(I_\rho[\![t_1]\!], \cdots, I_\rho[\![t_n]\!])$$

2. 原子論理式の意味 : $I_\rho[\![A]\!]$ は以下のように定める。(これは、「真」か「偽」となる。)
   - $\perp$ の意味: $I_\rho[\![\perp]\!] =$ 偽。
   - $P(t_1, \cdots, t_n)$ の意味: (P がアリティ n とする。)

$$I_\rho[\![P(t_1, \cdots, t_n)]\!] = P^I(I_\rho[\![t_1]\!], \cdots, I_\rho[\![t_n]\!])$$

3. 原始論理式以外の論理式の意味 : $I_\rho[\![F]\!]$ は真か偽であり、以下のように定める。
   - $(F \wedge G), (F \vee G), (F \supset G), (\neg F)$ の意味: これらの意味は、$I_\rho[\![F]\!]$ と $I_\rho[\![G]\!]$ から、命題論理における真理値表と同じ要領で定める。
   - $(\forall x F)$ の意味: D の任意の要素 u に対して、$I_{\rho[x \mapsto u]}[\![F]\!]$ が真のとき、およびその時に限り、$I_\rho[\![(\forall x F)]\!]$ は真である。
   - $(\exists x\ F)$ の意味: D のある要素 u に対して、$I_{\rho[x \mapsto u]}[\![F]\!]$ が真のとき、およびその時に限り、$I_\rho[\![(\exists x F)]\!]$ は真である。

2 意味の例

前章の定義だけで「わかった」という人はなかなかいないと思うので、以下では、具体例について考える。意味を考える対象となる言語は L_1 とする。ただし、以下の例では、等号の解釈 $=^I$ が、変形の際の同値を表す $=$ とまざってわかりにくいので、$=^I$ を eq^I と書くことにする。

2.1 例 0: 前回の言語 L_1 に対する解釈の 1 つ

- 領域: $D = \mathtt{N}$. (すべての自然数からなる集合)
- 付値: ρ はすべての変数を、D の要素である 37 に対応付ける関数。
- 関数記号の解釈: s^I は、1 を加える関数。$+^I$ は、足し算。$*^I$ は、かけ算。
- 述語記号の解釈: eq^I は、$\mathtt{N}$ の要素としての等しさを表す。つまり、$u, v \in \mathtt{N}$ に対して、$u = v$ ならば $\mathrm{eq}^I(u, v)$ は「真」であり、$u \neq v$ ならば $\mathrm{eq}^I(u, v)$ は「偽」である。

これらの領域、付値、解釈のもとで、$x = 37$ という論理式の意味は真である。つまり、

$$\begin{aligned} I_\rho[\![x = 37]\!] &= \mathrm{eq}^I(I_\rho[\![x]\!],\ I_\rho[\![37]\!]) \\ &= \mathrm{eq}^I(37,\ 37) \\ &= 真 \end{aligned}$$

次に、上記の領域、付値、解釈のもとで、$s(x) + y = s(x + y)$ という論理式の意味は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} I_\rho[\![s(x) + y = s(x + y)]\!] &= \mathrm{eq}^I(I_\rho[\![s(x) + y]\!],\ I_\rho[\![s(x + y)]\!]) \\ &= \mathrm{eq}^I(I_\rho[\![s(x)]\!] + I_\rho[\![y]\!],\ I_\rho[\![x + y]\!] + 1) \\ &= \mathrm{eq}^I(I_\rho[\![x]\!] + 1 + I_\rho[\![y]\!],\ I_\rho[\![x]\!] + I_\rho[\![y]\!] + 1) \\ &= \mathrm{eq}^I(\rho(x) + 1 + \rho(y),\ \rho(x) + \rho(y) + 1) \\ &= \mathrm{eq}^I(37 + 1 + 37,\ 37 + 37 + 1) \\ &= 真 \end{aligned}$$

練習問題 1. ρ として $\rho(x) = 10, \rho(y) = 20$ となるものを取って (その他の変数に対する付値は何でもよい)、この論理式の意味を計算してみよう。

練習問題 2. ρ として $\rho(x) = 10, \rho(y) = 20$ となるものを取り、さらに、$+^I$ の解釈を「かけ算」として、この論理式の意味を計算してみよう。

同じ D, I, ρ のもとで、$\forall x\ (x = 37)$ の意味を計算してみよう。

$I_\rho[\![\forall x\ (x = x)]\!]$ は、D のすべての要素 u に対して、$I_{\rho[x \mapsto u]}[\![x = 0]\!]$ が真であるとき、およびそのときに限り真である。

$I_{\rho[x \mapsto u]}[\![x = 0]\!]$ が真であるかどうかは、$\rho[x \mapsto u](x)$ と 0^I が (自然数として) 等しいかどうか、で定まる。

ところで、$\rho[x \mapsto u](x) = u$ であり、$0^I = 0$ である。よって、「すべての $u \in \mathtt{N}$ に対して u と 0 が等しいかどうか」で、もとの論理式の真偽が定まるが、もちろん、このことは成立しない。よって、$I_\rho[\![\forall x\ (x = x)]\!] =$ 偽である。

さらに、$\forall x\ (x = 0 \lor \neg(x = 0))$ の意味を計算してみよう。

$I_\rho[\![\forall x\ (x = 0 \lor \neg(x = 0))]\!]$ が真となるのは、すべての $u \in \mathtt{N}$ に対して、$I_{\rho[x \mapsto u]}[\![x = 0 \lor \neg(x = 0)]\!]$ が真になることである。

$I_{\rho[x \mapsto u]}[\![x = 0 \lor \neg(x = 0)]\!]$ をときほぐすと、最終的に、「$\mathrm{eq}^I(u, 0)$ が真である」か、または、「$\mathrm{eq}^I(u, 0)$ が偽である」とき、真となることがわかり、これはどんな u に対しても、どちらかが成立するので、全体として真である。

最後に、$\forall x\ \exists y\ (x = s(s(0)) * y \lor x = s(s(0)) * y + s(0))$ の意味を計算してみよう。

まず、$I_\rho[\![\forall x\ \exists y\ (x = s(s(0)) * y \lor x = s(s(0)) * y + s(0))]\!]$ が真になることと、すべての $u \in \mathtt{N}$ に対して、ある $v \in \mathtt{N}$ があって、$I_{\rho[x \mapsto u][y \mapsto v]}[\![x = s(s(0)) * y \lor x = s(s(0)) * y + s(0)]\!]$ が真になることは同値である。

ここで、

$$\begin{aligned} I_{\rho[x \mapsto u][y \mapsto v]}[\![x = s(s(0)) * y]\!] &= \mathrm{eq}^I(I_{\rho[x \mapsto u][y \mapsto v]}[\![x]\!],\ I_{\rho[x \mapsto u][y \mapsto v]}[\![s(s(0)) * y]\!]) \\ &= \mathrm{eq}^I(\rho[x \mapsto u][y \mapsto v]x,\ ((I_{\rho[x \mapsto u][y \mapsto v]}[\![0]\!] + 1) + 1) * \rho[x \mapsto u][y \mapsto v](y)) \\ &= \mathrm{eq}^I(u, 2v) \end{aligned}$$

となる。同様に、$I_{\rho[x \mapsto u][y \mapsto v]}[\![x = s(s(0)) * y + s(0)]\!] = \mathrm{eq}^I(u, 2v + 1)$ となる。

よって、$I_\rho[\![\forall x\ \exists y\ (x = s(s(0)) * y \lor x = s(s(0)) * y + s(0))]\!]$ が真になることと、すべての $u \in \mathtt{N}$ に対して、ある $v \in \mathtt{N}$ があって、$(u = 2v)$ または、$(u = 2v + 1)$ となることが同値である。そこで、$v = u/2$ と取れば (小数部分は切り捨てる)、u が偶数であっても奇数であってもこれが成立するので、上記の論理式の意味は「真」となる。

2.2 例 1: 前回の言語 L_1 に対する別の解釈

- 領域: $D = \mathtt{N}$.
- 付値: ρ はすべての変数を 0 に対応付ける。
- 関数記号の解釈: s^I は、1 を加える関数。$+^I$ は、足し算。$*^I$ は、かけ算。
- 述語記号の解釈: $=^I$ は、$u = v \Leftrightarrow |u - v|$ が 5 で割り切れる、として定まる等しさ。

この解釈は、領域としては自然数の集合全体を取っているが、$=$ の解釈が「5 で割った余りが等しい」としているので、実質的に、「5 で割った余り」の世界を表している。従って、$I_\rho[\![\forall x(\neg(x = 0) \supset x * x * x * x = 1)]\!]$ は真となる。(つまり、0 以外の全ての数は 4 回かけると、1 になる。これは、素数 p で割った余りの世界での特徴である。)

2.3 例 2: 前回の言語 L_1 に対する解釈

- 領域: $D^5 = \{0, 1\}$.
- 付値: ρ はすべての変数を 0 に対応付ける。
- 関数記号の解釈: s^I は、0,1 を反転させる関数。$+^I$ は、$0 +^I x = x$, $1 +^I x = 1$ という関数。$*^I$ は、$0 *^I x = 0$, $1 *^I x = x$ という関数。
- 述語記号の解釈: $=^I$ は、通常の「等しさ」をあらわす。

この解釈は、$+$ を論理和 (「または」)、$*$ を論理積 (「かつ」) に対応付けた、ブール代数の世界における解釈である。たとえば、$I_\rho[\![\forall x \forall y \forall z(x * (y + z) = x * y + x * z)]\!]$ は真であるが、$I_\rho[\![\exists x(\neg(x = 0) \wedge \neg(x = s(0)))]\!]$ は偽である。

3 恒真性と充足可能性

様々な解釈があるが、意味論で特に重要なのは、以下の 2 つの概念である。

- 論理式 A が、すべての I, ρ, D のもとで真であれば、A は恒真 (valid) であるという。($\models A$)
- 論理式 A が、ある I, ρ, D のもとで真であれば、A は充足可能 (satisfiable) であるという。

恒真性と充足可能性は表裏一体の関係であり、「A が恒真」と、「$\neg A$ が充足可能でない」ことは同じである。つまり、恒真性判定プログラムを作れば、充足可能性判定プログラムもできるし、逆も同様である。

例: P を 1 引数の述語記号とするとき、$P(x) \supset P(x)$ は恒真かつ充足可能であり、$P(x) \supset (\neg P(x))$ は恒真ではないが、充足可能である。($P(x)$ が成立しない解釈を取れば、真となるので。) また、$P(x) \wedge (\neg P(x))$ は、恒真でも充足可能でもない。

4 健全性と完全性

論理式 F に対して、「形式的体系で証明できる」ことと「恒真である」こととはまったく独立に定義された。では、それらの関係はどうだろうか?

定理 1 (一階述語論理の健全性と完全性) 一階述語論理の論理式 F に対して、以下の *2* つは同値である。

- F が *(NK あるいは、それと同等な他の証明体系で)* 証明可能ならば、F は恒真である。 *[健全性 soundness]*
- F が恒真ならば、F は証明可能である。 *[完全性 completeness]*

証明は省略する。(参考書としてあげた小野先生の本や林先生の本などを参考にされたい。)

5 証明可能性と恒真性

一階述語論理に対しては、健全性と完全性が両方とも成立するので、証明可能性と恒真性は同値である。しかし、それらの「使い勝手」は異なる。

- 形式的体系: 証明できることは示しやすいが、証明できないことを示すのは大変である。
- 意味論: 恒真でない (ある解釈で偽である) ことは示しやすいが、恒真であることを示すのは大変である。

よって、論理式が成立する場合は形式的体系を使って証明し、論理式が成立しない場合は意味論を使って偽になる解釈の存在を示す、というのが、賢いやりかたである。

例題: 意味論を使って論理式が恒真でないことを示そう。P, Q, R を、述語記号 (アリティはそれぞれ 0 と 1 と 1) とする。

- $(P \wedge Q(0)) \supset R(0)$.

  これを偽とする解釈 I を構成しよう。まず、$(P \wedge Q(0)) \supset R(0)$ が偽になることから、I のもとで、(論理式の意味論の定義より) $P \wedge Q(0)$ が真で、$R(0)$ が偽である。よって、P と $Q(0)$ が真である。

  定数 0 に対応付けられる値を a とする。P^I を真とし、Q^I は「a に対しては真、a 以外に対しては任意の値 (真または偽のどちらでもよい) を対応付ける関数」、また、R^I は「a に対しては偽、a 以外は任意の値を対応付ける関数」とする。領域 D は a を含む任意の集合にすればよい。また付値 ρ は何でもよい。

  これらの領域、付値、解釈のもとで、$(P \wedge Q(0)) \supset R(0)$ は偽となる。

- $(\exists x\ Q(x)) \supset (\forall x\ Q(x))$.

  これを偽とする解釈では、$\exists x\ Q(x)$ が真となり、$\forall x\ Q(x)$ が偽となる。すなわち、$Q(x)$ が真となる D の要素が存在するが、全ての要素に対して真ではない。

  そこで、$D = \{a, b\}$, Q の解釈 Q^I は「a に対しては真、b に対しては偽」となるようにする。このとき、(ρ はどう取っても同じなので、たとえば、すべての変数を a に対応付ける付値とする)、$I_\rho[\![\exists x\ Q(x)]\!]$ は真となり、$I_\rho[\![\forall x\ Q(x)]\!]$ は偽となる。

- $(\forall x(Q(x) \vee R(x))) \supset ((\forall x\ Q(x)) \vee (\forall x\ R(x)))$.

  これを偽とする解釈では、$\forall x(Q(x) \vee R(x))$ が真、$(\forall x\ Q(x)) \vee (\forall x\ R(x))$ が偽である。よって、$\forall x\ Q(x)$ も $\forall x\ R(x)$ も、両方とも偽である。つまり、「D のすべての要素 u に対して $Q(u)$ が成立」することはなく、「D のすべての要素 u に対して $R(u)$ が成立」することもない。

  一方、「D のすべての要素 u に対して $Q(u) \vee R(u)$ が成立」するので、領域 D は少なくとも 2 つの要素を含む。それらを a, b とする。Q^I は a に対して「偽」となり、R^I は、b に対して「偽」となる。R^I は a に対して「真」で、Q^I は b に対して「真」となる。まとめると以下の表になる。

対象となる要素	a	b
$Q^I(x)$ の真理値	偽	真
$R^I(x)$ の真理値	真	偽

  そこで、$D = \{a, b\}$ として、Q, R の解釈を上記の表のように定めると、問題の論理式を偽とする解釈になっていることがわかる。

- 補足: 論理式 $(\forall x(Q(x) \vee P)) \supset ((\forall x\ Q(x)) \vee (\forall x\ P))$ を偽とする解釈は作れない。これは、前問と似たように見えるが、P は述語記号であるためこれ以上分解できず、x を含むことができない。つまり、P の解釈は、真と偽のどちらかに決めるしかないので、前問のような解釈を作ることができない。

  実際、この論理式は、証明可能である。証明が得意な人は、これを証明してみるとよい。(排中律を使う必要あり。)

6　追加例題

P, Q はアリティ1の述語記号、R はアリティ2の述語記号、s はアリティ1の関数記号、0は定数とする。

以下の論理式を偽とする解釈を1つ示せ。(複数の解釈があり得るので、そのうちの1つを示す。他にもいろいろある。)

ここでは、「どうやってその解釈を得たか」については、1問目のみ書き、2問目以降では、結論として、どういう解釈をとればよいかのみ示す。

- $\forall x\ \forall y\ (P(x) \vee \neg P(y))$.

  答を得る道筋. ある領域 D, 解釈 I、付値 ρ のもとで、$I_\rho[\![\forall x\ \forall y\ (P(x) \vee \neg P(y))]\!] =$ 偽とする。

  $\forall$ の解釈の定義から、「すべての $u \in D$ に対して、$I_{\rho[x \mapsto u]}[\![\forall y\ (P(x) \vee \neg P(y))]\!] =$ 真」ではない。つまり、「ある $u \in D$ に対して、$I_{\rho[x \mapsto u]}[\![\forall y\ (P(x) \vee \neg P(y))]\!] =$ 偽」である。

  同様にして、「ある $u, v \in D$ に対して、$I_{\rho[x \mapsto u][y \mapsto v]}[\![P(x) \vee \neg P(y)]\!] =$ 偽」となる。

  さらに、展開すると、「ある $u, v \in D$ に対して、$I_{\rho[x \mapsto u][y \mapsto v]}[\![P(x)]\!] =$ 偽かつ、$I_{\rho[x \mapsto u][y \mapsto v]}[\![\neg P(y)]\!] =$ 偽」となる。

  $\neg$ についても展開すると、「ある $u, v \in D$ に対して、$I_{\rho[x \mapsto u][y \mapsto v]}[\![P(x)]\!] =$ 偽かつ、$I_{\rho[x \mapsto u][y \mapsto v]}[\![P(y)]\!] =$ 真」となる。

  よって、P を解釈する関数 P^I は、ある $u, v \in D$ に対して、$P^I(u) =$ 偽かつ、$P^I(v) =$ 真となる。

  最終的な答。$D = \{a, b\}$ とし、$P^I(a) =$ 偽、$P^I(b) =$ 真と定めると、(ρ が何であろうと) $I_\rho[\![\forall x\ \forall y\ (P(x) \vee \neg P(y))]\!] =$ 偽となる。

- $\forall x\ \forall y\ (R(x, y) \supset R(y, x))$.

  答のみ. $D = \{a, b\}$ とし、$R^I(a, a) = R^I(a, b) = R^I(b, b) =$ 真、$R^I(b, a) =$ 偽と定めると、(ρ が何であろうと) $I_\rho[\![\forall x\ \forall y\ (R(x, y) \supset R(y, x))]\!] =$ 偽となる。

- $((\forall x\ P(x)) \supset (\forall x\ Q(x))) \supset \forall x(P(x) \supset Q(x))$

  答のみ. $D = \{a, b\}$ として、$P^I(a) =$ 偽, $P^I(b) =$ 真、$Q^I(a) =$ 偽, $Q^I(b) =$ 偽とすると、$I_\rho[\![((\forall x\ P(x)) \supset (\forall x\ Q(x))) \supset \forall x(P($
  偽となる。

- $(P(0) \wedge \forall x(P(x) \supset P(s(x)))) \supset \forall x P(x)$

  答. $D = \{a, b\}$, $s^I(u) = u$ (つまり s^I は D の要素をもらって、同じ要素を返す関数)、$P^I(a) =$ 真, $P^I(b) =$ 偽とすると、ρ が何であっても、与えられた論理式が「偽」になる解釈であることがわかる。