『論理と形式化』 資料その 1

亀山幸義 (kam[at]cs.tsukuba.ac.jp)
海野広志 (uhiro[at]cs.tsukuba.ac.jp)

1　一階述語論理の言語

一階述語論理の言語 (language)：
論理体系の「言語」とは、論理式を書くための「ことば」であり、一階述語論理に対する言語の場合は、以下の要素からなりたっている。

- 論理記号: $\bot, \wedge, \vee, \supset, \neg, \forall, \exists$ (その他に $\equiv$ なども使うことがある。)
- 変数: $x, y, z, \cdots$ (必要に応じて、x_1 のように添字を使う。以下、同じ。)
- 定数: $c, d, \cdots$
- 関数記号: $f, g, h, \cdots$ (それぞれの関数記号は、アリティ(引数の個数) が決まっているものとする。)
- 述語記号: $P, Q, R, \cdots$ (それぞれの述語記号は、アリティ(引数の個数) が決まっているものとする。)
- 補助記号: 開きかっこ、閉じかっこ など。(場合によっては中括弧等を用いる。)

この中で、論理記号、変数、補助記号は、いつでも同じ記号を使うが、定数、関数記号、述語記号は、対象とする問題領域によって違ってくる。その例を見てみよう。

例 1: 一階の自然数論 (ペアノ算術) の言語 L_1.

- 定数: 0.
- 関数記号: s (1 引数), $+, *$ (以上、2 引数).
- 述語記号: $=$ (2 引数).

論理式の例: $\forall x\ \exists y\ (x = s(s(0)) * y \vee x = s(s(0)) * y + s(0))$. (すべての自然数は偶数であるか、奇数であるかどちらかである。ここで、$s(0)$ は自然数の「1」を表す。)

例 2: 上記の例を少し拡張した言語 L_2.

- 定数: 0.
- 関数記号: $s, !$ (以上、1 引数), $+, *, -, /$ (以上、2 引数).
- 述語記号: $=, <, >, \leq, \geq$ (以上、2 引数).

論理式の例: $\forall x\ (x! \geq x)$, $\forall x\ (x! \geq x)$.
論理式の例: $\forall x\ \exists y\ (x < y \wedge \neg(\exists z\ \exists w\ z > 1 \wedge w > 1 \wedge y = z * w))$. (どんな自然数よりも、大きな素数が存在する。つまり、素数は無限にたくさん存在する。)

例 3: 「親、祖父母」をあらわす言語 L_3.

- 定数: Alice, Bob, Chris, Emma.
- 関数記号: なし。
- 述語記号: isParent, isGrandParent (以上、2 引数).

論理式の例: isParent(Alice,Bob)。
論理式の例: $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (\mathrm{isParent}(x, y) \wedge \mathrm{isParent}(y, z) \supset \mathrm{isGrandParent}(x, z))$. (親の親は、祖父か祖母である。)

2　一階述語論理の論理式

個別の言語ではなく、一般的な言語 (定数を $c, d, \cdots$ とあらわす、等) に対して、論理式の構文を、BNF (Backus Normal Form) で定義する。

$$
\begin{aligned}
\text{項 } t &::= x \mid c \mid f(t, t, \cdots, t) \\
\text{原子論理式 } A &::= \perp \mid P(t, t, \cdots, t) \\
\text{論理式 } F &::= A \mid (F \wedge F) \mid (F \vee F) \mid (F \supset F) \mid (\neg F) \mid (\forall x\ F) \mid (\exists x\ F)
\end{aligned}
$$

ただし、項 $f(t_1, \cdots, t_n)$ は、f のアリティが n の時のみ構成でき、原子論理式 $P(t_1, \cdots, t_n)$ は、P のアリティが n の時のみ構成できるものとする。

例: 言語 L_1 では、$0 + x$ は項であるが、$+x$ は項ではない。

原子論理式において、0 引数の述語の場合は、$P()$ のように書かず、P と書くことがある。

論理式の括弧は適宜省略する。($\wedge, \vee, \supset, \neg, \forall, \exists$ の順に結合力が強いものとし、同じ記号の間では、$\wedge, \vee$ は左結合、$\supset$ は右結合とする。) たとえば、$P \wedge P \wedge P \supset P \supset P$ は、$((P \wedge P) \wedge P) \supset (P \supset P)$ と括弧付けできる。

3　形式的体系と意味論

形式的体系と、意味論の世界は、「まったく」別世界であることを認識しよう。

形式的体系		意味論
公理、推論規則	$\Longleftarrow$ まったく別物!$\Longrightarrow$	付値、解釈、構造、モデル
証明できる/できない		正しい (真)/正しくない (偽)
$\vdash A$		$\models A$

2 つの世界は独立に定義され、あとで、両者が一致するとかしないかを議論する。(証明できる論理式の集合と、常に正しい論理式の集合は、命題論理や、一階述語論理の場合は、たまたま一致する。)

例 1. 命題論理

- 形式的体系: NK の体系 (のうち、命題論理の規則だけの部分)
- 意味論: 真理値表による意味論

例 2. 直観主義の命題論理 (参考)

- 形式的体系: NK の体系 (のうち、命題論理の規則だけの部分) から排中律を除いたもの (直観主義論理)
- 意味論: クリプキモデルによる意味論

例 3. 一階述語論理

- 形式的体系: NK の体系
- 意味論: この資料の、ここから後で与える。

4 一階述語論理の解釈 (まずは言語 L_1 に対して)

最終的には、一階述語論理の全ての論理式が「真」か「偽」かを決めたい。論理式の構成要素ごとに、それに対応する「もの」がどう決まるか、決めればよい。

一般論は、記号ばかりで難しいので、今回は言語 L_1 の場合を考える。

言語 L_1 に対する (ある 1 つの) 解釈 I^1:

- 領域 D: 変数が動く集合を対応付ける。ここでは、一例として自然数の集合をとる。つまり、$\forall x\ A$ と書いてあれば、「任意の自然数 x が、、、」という意味になる。
- 付値 ρ: それぞれの変数に、D の要素を対応付ける関数。たとえば、$\rho(x) = 13$, $\rho(y) = 15$ なら、$x + y$ という項は 28 を表すことになる。
- 定数の解釈: 定数 0 を、D の要素としての 0 に対応付ける。(これでは何をやっているかわからないが、あとで、定数 0 を「0 でないもの」に対応付ける解釈がでてくる。)
- 関数記号の解釈: s は、自然数上の「1 を加える」関数とする。$+, *$ はそれぞれ、足し算、かけ算である。
- 述語記号の解釈: $=$ の解釈は、D の要素として等しいとき真で、そうでないとき偽とする。

例: $\rho(x) = 13, \rho(y) = 15$ のとき、$x + y = x * s(s(0))$ という論理式は偽であり、$x + y = s(x) * s(s(0))$ という論理式は真である。

言語 L_1 に対する (別の) 解釈 I^2:
上記のように解釈するのが自然ではあるが、別の解釈も可能である。

- 領域 D: 自然数を要素とする 2*2 正方行列の集合としよう。
- 付値 ρ: それぞれの変数に、D の要素を対応付ける関数。
- 定数の解釈: 定数 0 を、2*2 のゼロ行列に対応付ける。
- 関数記号の解釈: s は、「2*2 の単位行列を加える」関数とする。$+, *$ はそれぞれ、行列としての足し算とかけ算である。
- 述語記号の解釈: $=$ の解釈は、行列として等しい (行列の全ての要素が等しい) とき真で、そうでないとき偽とする。

例: $\rho(x)$ を 2*2 のゼロ行列、$\rho(y)$ を 2*2 の単位行列としよう。このとき、$x + y = s(x) * s(s(0))$ という論理式は偽である。

5 一階述語論理の意味論 (まずは言語 L_1 に対して)

解釈ができたら、原子論理式の意味までは定まる。あとは、これを、一般の論理式の意味に広げるだけである。

言語 L_1 に対する解釈を 1 つ固定して、それを I と呼ぶことにする。また、I における領域を D, 付値を ρ とする。

以下では、「解釈 I, 付値 ρ のもとでの論理式 F の真理値」を定める。これを、$I_\rho[\![F]\!]$ と書く。これは、「真」か「偽」のいずれかの値を取る。(なお、ρ は以下の定義の途中で、変更することがあるので、わざわざパラメータとして明示している。D は途中で変更しないので、パラメータとして書いていない。)

言語 L_1 に対する意味論 (まずは命題論理部分に対して):
解釈 I と付値 ρ のもとでの論理式 F の意味 $I_\rho[\![A]\!]$ は次の通りに定義される。

- 原子論理式 A の意味 (真か偽か) は、上記の解釈 I で定まっている。
- 論理式 $(F \wedge G)$ の意味 (つまり、 $I_\rho[\![(F \wedge G)]\!]$) は、$I_\rho[\![F]\!]$ と $I_\rho[\![G]\!]$ の両方が真のとき、真であり、それ以外のとき、偽である。
- 論理式 $(F \vee G)$ の意味は、$I_\rho[\![F]\!]$ と $I_\rho[\![G]\!]$ の 1 つ以上が真のとき、真であり、それ以外のとき、偽である。
- 論理式 $(F \supset G)$ の意味は、$I_\rho[\![F]\!]$ が偽か、$I_\rho[\![G]\!]$ が真のとき、真であり、それ以外のとき、偽である。
- 論理式 $(\neg F)$ の意味は、$I_\rho[\![F]\!]$ が偽のとき、真であり、それ以外のとき、偽である。

ここまでは良いだろうか。ややこしそうな事を書いてあるが、いまのところ命題論理の真理値表とほとんどおなじことをやっているだけである。

例: $\rho(x) = 13, \rho(y) = 15$ のとき、$I_\rho[\![(x + y = s(x) * s(s(0))) \wedge (y = s(s(x)))]\!]$ は真である。

言語 L_1 に対する意味論 (述語論理部分に対して):
さて、一番の難関である。$\forall$ と $\exists$ の意味を与える準備として、付値の拡張 $\rho[x \mapsto u]$ を定義する。ここで、x は変数であり、u は領域 D の要素である。

> $\rho[x \mapsto u]$ は、x 以外の変数に対しては、ρ と同じ値を返し、x に対しては、u を返す。

例: $\rho(x) = 13, \rho(y) = 15$ のとき、$\rho[x \mapsto 20](x) = 20$ であり、$\rho[x \mapsto 20](y) = 15$ である。

述語論理部分 (限量子) の意味論を次のように与える。

- 論理式 $(\forall x\ F)$ の意味は、D の任意の要素 u に対して、$I_{\rho[x \mapsto u]}[\![F]\!]$ が真のとき、真であり、それ以外のとき、偽である。
- 論理式 $(\exists x\ F)$ の意味は、D のある要素 u に対して、$I_{\rho[x \mapsto u]}[\![F]\!]$ が真のとき、真であり、それ以外のとき、偽である。

ここは大変難しいので、例をじっくり見る必要がある。

例. L_1 に対する解釈 I^1 による意味論
$\forall$ と $\exists$ を含む、いろいろな論理式を解釈してみよう。ただし、$\rho(x) = 13$, $\rho(y) = 15$ とする。

- ${I^1}_\rho[\![\exists z\ x + y = z * s(s(0))]\!]$ は、${I^1}_{\rho[z \mapsto u]}[\![x + y = z * s(s(0))]\!]$ が真になる $u \in D$ が 1 つでも存在すれば、真である。

  ここで、$u = 14$ とすると、$\rho[z \mapsto u]$ のもとで、$x+y$ は 28 であり、$z*s(s(0))$ は 28 となるので、${I^1}_{\rho[z \mapsto u]}[\![x + y = z * s(s(0))]\!]$ は真である。よって、${I^1}_\rho[\![\exists z\ x + y = z * s(s(0))]\!]$ は真である。

- ${I^1}_\rho[\![\forall x\ \exists y\ s(x) = y]\!]$ は、${I^1}_{\rho[x \mapsto u]}[\![\exists y\ s(x) = y]\!]$ がすべての $u \in D$ に対して真となれば、真である。これは、${I^1}_{\rho[x \mapsto u][y \mapsto v]}[\![s(x) = y]\!]$ がある $v \in D$ に対して真となれば、真である。

  ここで、v として $u + 1$ を取ると、$s(x) = y$ は、$u + 1 = u + 1$ となって真である。よって、そのような v を (どんな u に対しても) 取ることができる。よって、${I^1}_\rho[\![\forall x\ \exists y\ s(x) = y]\!]$ は真である。

- ${I^1}_\rho[\![\exists y\ \forall x\ s(x) = y]\!]$ は、${I^1}_{\rho[y \mapsto v]}[\![\forall x\ s(x) = y]\!]$ がある $v \in D$ に対して真となれば、真である。

  これは、${I^1}_{\rho[y \mapsto v][x \mapsto u]}[\![s(x) = y]\!]$ がすべての $u \in D$ に対して真となれば、真である。

  ここで、y は、付値 $\rho[y \mapsto v][x \mapsto u]$ のもとで、v という値である。$s(x)$ の方は、この付値のもとで $u + 1$ という値を取る。

  よって、「${I^1}_{\rho[y \mapsto v][x \mapsto u]}[\![s(x) = y]\!]$ がすべての $u \in D$ に対して真となる」ためには、$v = 1 = 2 = 3 = \cdots$ が成立しなければならないが、そんなことは不可能である。したがって、「${I^1}_{\rho[y \mapsto v][x \mapsto u]}[\![s(x) = y]\!]$ がすべての $u \in D$ に対して真となる」ことができないので、${I^1}_\rho[\![\exists y\ \forall x\ s(x) = y]\!]$ は、偽である。

6　演習問題

言語 L_2 に対する、以下の解釈 (I^3 と呼ぶ) を考える。

- 領域 D は自然数の集合とする。
- 定数 0、関数記号 $s, +, *$、述語記号 $=$ の解釈は、解釈 I^1 と同じ。
- 関数記号 ! は、自然数の階乗と解釈する。
- 関数記号 $-, /$ は、自然数上の引き算 (マイナスになる場合は 0 とする) と割り算 (割り切れない場合は切り捨て、また $x/0$ は便宜上 0 とする) と解釈する。
- 述語記号 $<, >, \leq, \geq$ は、それぞれ、自然数の上の、自然な大小関係として解釈する。
- 付値 ρ^3 は、$\rho^3(x) = 13$, $\rho^3(y) = 15$ とする。

以下の論理式のそれぞれを F とするとき、I^3 のもとでの真理値 ${I^3}_{\rho^3}[\![F]\!]$ を計算せよ。

- $x > 0.$
- $s(x) + y = s(x + y).$
- $x/y < y/x.$
- $\exists z\ ((x < z) \wedge (z < y)).$
- $\forall z\ \forall w\ (s(z) + w = s(z + w)).$
- (余力がある人のみ) 解釈 I^2 (2*2 行列の領域で解釈するもの) に関して、$\forall x\ \forall y\ x * y = y * x$ が成立するかどうか。計算せよ。

演習問題の解答:

- ${I^3}_{\rho^3}[\![x > 0]\!]$ は、$\rho^3(x) > 0$ のときに真である。$\rho^3(x) = 13$ なので、$\rho^3(x) > 0$ は成立し、${I^3}_{\rho^3}[\![x > 0]\!]$ は真である。
- 前問と同様に、${I^3}_{\rho^3}[\![s(x) + y = s(x + y)]\!]$ は、$\rho^3(x) + 1 + \rho^3(y) = \rho(x) + \rho(y) + 1$ のときに真である。この式の両辺はいずれも 29 であるので成立する。よって、${I^3}_{\rho^3}[\![s(x) + y = s(x + y)]\!]$ は真である。
- 前問とまったく同様であり、$\rho(x)/\rho(y) < \rho(y)/\rho(x)$ を計算すると、$13/15 = 0 < 15/13 = 1$ となり成立する。よって、${I^3}_{\rho^3}[\![x/y < y/x]\!]$ は真である。
- $\exists z\ ((x < z) \wedge (z < y)).$

  ${I^3}_{\rho^3}[\![\exists z\ ((x < z) \wedge (z < y))]\!]$ が真となるのは、ある $u \in \mathtt{N}$ に対して、${I^3}_{\rho^3[z \mapsto u]}[\![(x < z) \wedge (z < y)]\!]$ が真となるときである。ここで、$\rho^3[z \mapsto u](x) = 13$, $\rho^3[z \mapsto u](y) = 15$, $\rho^3[z \mapsto u](z) = u$ であるので、結局、$13 < u \wedge u < 15$ となる $u \in \mathtt{N}$ が存在するかどうかである。$u = 14$ とすれば $13 < u \wedge u < 15$ は成立するので、そのような $u \in \mathtt{N}$ は存在する。よって、${I^3}_{\rho^3}[\![\exists z\ ((x < z) \wedge (z < y))]\!]$ は真である。

- $\forall z\ \forall w\ (s(z) + w = s(z + w)).$

  ${I^3}_{\rho^3}[\![\forall z\ \forall w\ (s(z) + w = s(z + w))]\!]$ が真となるのは、すべての $u_1, u_2 \in \mathtt{N}$ に対して、${I^3}_{\rho^3[z \mapsto u_1][w \mapsto u_2]}[\![s(z) + w = s(z + w)]\!]$ が真となるときである。

  ここで、$\rho^3[z \mapsto u_1][w \mapsto u_2](z) = u_1$、$\rho^3[z \mapsto u_1][w \mapsto u_2](w) = u_2$ であるので、結局、$u_1 + 1 + u_2 = u_1 + u_2 + 1$ が成立するかどうかであるが、これは、u_1, u_2 によらずに成立する。

  よって、すべての $u_1, u_2 \in \mathtt{N}$ に対して、上記が成立するので、${I^3}_{\rho^3}[\![\forall z\ \forall w\ (s(z) + w = s(z + w))]\!]$ は真である。

- (余力がある人のみ) 解釈 I^2 (2*2 行列の領域で解釈するもの) に関して、$\forall x\ \forall y\ x * y = y * x$ が真であるかどうか。計算せよ。

  I^2 における付値を ρ とすると (ρ が何であるか定めていないが、何であっても以下の結論は同じである)、

  ${I^2}_\rho[\![\forall x\ \forall y\ x * y = y * x]\!]$ が真となるのは、すべての $u_1, u_2 \in M_{2,2}$ に対して、${I^2}_{\rho[x \mapsto u_1][y \mapsto u_2]}[\![x * y = y * x]\!]$ が真となる時である。(ここで、2*2 行列すべての集合を $M_{2,2}$ とあらわした。)

  これは、すべての $u_1, u_2 \in M_{2,2}$ に対して、$u_1 * u_2 = u_2 * u_1$ が真となるということである。しかし、

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  と置くと、$u_1 * u_2 \neq u_2 * u_1$ となるので、「すべての。。。に対して。。。が真」ということはない。よって、${I^2}_\rho[\![\forall x\ \forall y\ x * y = y * x]\!]$ は偽である。

7 まとめ

- 言語、論理式
- (形式的体系 LK; 水谷先生の授業)
- 意味論: 領域、付値、個々の記号の解釈、論理式の解釈