

『論理と形式化』試験問題

2014 年 6 月 27 日 (金)

解答用紙は 2 枚です。問題 1 と問題 2 の解答を、それぞれ、別の解答用紙に記入しなさい。それぞれの解答用紙に氏名、学籍番号、問題番号を明記しなさい。なお、裏面も使って構いません。

問題 1. 以下の論理式のうち NK の定理であるものは証明し、そうでないものはその論理式を偽とする解釈を 1 つ与えなさい。

- (a) $((A \supset B) \vee (A \supset C)) \supset (A \supset (B \wedge C))$
- (b) $((A \supset B) \wedge (A \supset C)) \supset (A \supset (B \wedge C))$
- (c) $((A \supset B) \vee (A \supset C)) \supset (A \supset (B \vee C))$
- (d) $(\forall x F(x)) \supset (\neg \forall x \neg F(x))$
- (e) $(\forall x F(x)) \supset (\neg \exists x \neg F(x))$

問題 2. 以下の H1,H2,H3,H4 から構成される Prolog プログラムについて考える。X, Y, Z は変数、0 は定数、s は関数記号、p と r は述語記号である。

```
H1  r( 0,      Y ).  
H2  r(s(X), s(Y)) :- r(X, Y).  
H3  p(X, Y, X)   :- r(X, Y).  
H4  p(X, Y, Y)   :- r(Y, X).
```

(2-a) ホーン節 H1 は、 $\forall X(r(0, X))$ という論理式を表す。同様にして、ホーン節 H2 が表す論理式を一階述語論理の論理式として書きなさい。

(2-b) 上記のプログラムに対して、以下のゴールを Prolog システムで実行した時、得られる解(複数の解がある時はその全て)を示しなさい。

- (2-b-1) $?- r(s(s(0)), s(0)).$
- (2-b-2) $?- r(s(0), s(s(0))).$
- (2-b-3) $?- p(s(s(0)), s(0), Z).$
- (2-b-4) $?- p(s(s(0)), s(s(0)), Z).$

なお、変数を含まないゴールの実行は、停止すれば、true か false を返す。変数を含むゴールが true を返す時、true とその変数の値をセットにして返す。

(2-c) 上記のプログラム中の 0 は自然数の 0 で、s は「1 を加える関数」であると考えた時、述語 r と p は、それぞれ、どういう関係を表すか言葉で簡潔に述べなさい。

(2-d) 成功する解(true を返す解) は、NK の証明に対応する。上記の (2-b) のゴールを走らせた時に成功する解の 1 つについて、対応する NK の証明を書きなさい。

(2-e) 上記の (2-b-1),(2-b-2) のうち有限的に失敗する(成功する解が 1 つもない) ゴールを G とする。H1, H2 に対応する論理式を真とし、G に対応する論理式を偽とする解釈 I を示しなさい。(これらの論理式に述語 p は含まれないので、p の解釈は与えなくてよい。)

(2-f) (ボーナス問題; 時間が余った人のみ) 自然数 X,Y の最大公約数 (greatest common divisor) が Z であるという関係 $\text{gcd}(X,Y,Z)$ を Prolog のプログラムとして実現せよ。