第1章　論理

1.1　非論理的な思考

推論は人間の思考の中心をなす行為である．しかし，日常的な会話は非論理的な推論を多く含んでいる．

例 1 A さんと B さんの会話:

A 「雨が降ったら傘を持ってきてね.」
B 「わかった.」
(しばらく後に，B が傘を持ってきたのを見て)
A 「どうして，雨が降っていないのに傘を持ってくるの!」

もし B が傘を持ってきていなければ，(B が約束を守る人である限り) 雨は降っていないということはわかる．

しかし，B が傘を持ってきたからといって，雨が降っているとは限らない．B は，雨が降っていないときにどうするかは約束していないのだから，傘を持ってきても持ってこなくても良い．それなのに怒られては B は困惑するばかりである．

ここで用いられた論理を整理してみよう.「雨が降ったら，傘を持っていく」と「雨が降った」ということからは「傘を持っていく」ということを導くことができるが,「雨が降ったら，傘を持っていく」と「傘を持っていく」ということからは「雨が降った」ということを導けない．ここで大事なことは，上記の推論 (および非論理的な推論) は,「雨が降る」や「傘を持っていく」という個々の文が成立しているかどうかに関わらない，ということである．

論理学とは，個々の文が成立するかどうかに関係なく成立する推論について研究する学問である．

1.2　命題と真理値

命題 (proposition): 「正しい」かどうかを考える対象となる文のことである．

例 2 以下の文は命題である．

- 「今日は雨が降っている.」
- 「2 は 1 より大きい.」
- 「素数は有限個しか存在しない.」

以下の文は命題ではない．

- 「富士山」
- 「2 倍すると 10 になる整数」

命題が正しいことを「真 (T, true)」と言い，正しくないことを「偽 (F, false)」と言う．真と偽の値を合わせて真理値 (truth value) という．

我々が日常使う論理[1]では，命題は真か偽のいずれか一方の真理値を取る．たとえば,「2 は 1 より大きい.」 という命題は真という値を取り,「素数は有限個しか存在しない.」という命題は偽という値を取る．

ところで，命題は，上記のような基本的なものだけではない.「雨が降っているならば，B は傘を持っていく.」というように「雨が降る.」と「B は傘を持っていく.」という基本的な命題を「ならば」で組み合わせたものも命題である．命題に関する論理 (命題論理) は，複合的な命題を構成する方法についての論理である．

以下では，命題 (基本的な命題または複合的な命題) を A, B, C などの文字で表す．

1.3　命題を構成する方法

「ならば」のように，命題を組み合わせて複合的な命題を構成する記号を論理結合子 (logical connective) という．論理結合子には,「かつ」「または」「ならば」「でない」「同値」などがある．

1.3.1　「でない」

A でない: $\neg A$

「でない」 (not) は，否定 (negation) とも呼ばれる．命題 $\neg A$ は，A が真のとき偽となり，A が偽のとき真となる命題である．このことを，以下のような表 (真理値表，Truth Table) で表現することができる．

A	$\neg A$
真 (T)	偽 (F)
偽 (F)	真 (T)

1.3.2　「かつ」と「または」

$$\begin{cases} A \text{ かつ } B \quad : A \wedge B \\ A \text{ または } B : A \vee B \end{cases}$$

「かつ」 (and，論理積) は，連言 (conjunction) とも呼ばれる.「または」(or，論理和) は選言 (disjunction) とも呼ばれる．

命題 $A \wedge B$ は，A と B が両方真のときに真となり，そうでないときに偽となる命題を表す．命題 $A \vee B$ は，A と B の少なくとも一方が真のときに真となり，そうでないときに偽となる命題を表す．なお，A と B の両方とも真のときも $A \vee B$ は真である．

$$\begin{cases} \neg(A \wedge B) \text{ と } \neg A \vee \neg B \text{ の真理値は一致する．} \\ \neg(A \vee B) \text{ と } \neg A \wedge \neg B \text{ の真理値は一致する．} \\ \neg\neg A \text{ と } A \text{ の真理値は一致する．} \end{cases}$$

[1]真理値が真と偽の 2 つである論理を二値論理という．コンピュータの計算に対応する論理では，二値だけでなく「真か偽か有限時間に判定できない」ということを表す値を持つものがある (三値論理，多値論理).

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

1.3.3 「ならば」

A ならば B : $A \Rightarrow B$ ($A \supset B$ と書くこともある)

「ならば」(implication) は含意 (がんい) とも呼ばれる．命題 $A \Rightarrow B$ は，命題 A が真で，命題 B が偽であるときに偽となり，そうでないとき真となる．

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

A が偽のとき，$A \Rightarrow B$ は (B の真偽値によらず) 真となることに注意せよ．(例: 「雨が降れば傘を持っていく」という命題は，雨が降っていなければ，傘を持っていこうがいくまいが，真となる．)

$A \Rightarrow B$ と $(\neg A) \vee B$ の真理値は一致する．

1.3.4 「同値」

「同値」(equivalence) は以下の形の命題である．

A と B は同値 : $A \Leftrightarrow B$ ($A \equiv B$ と書くこともある)

命題 $A \Leftrightarrow B$ は，A と B の真偽値が一致するとき真となり，そうでないとき偽となる命題である．

A	B	$A \Leftrightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$A \Leftrightarrow B$ と $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ の真理値は一致する．

$A \Leftrightarrow B$ が常に真となるとき，命題 A と 命題 B は同値である，という．

1.3.5 命題の例

命題論理では，基本的な命題がどのようなものであるかは特に定めないが，整数の大小関係に関する命題を基本的な命題とすれば，以下のような命題が構成できる．

例 3

「2 は 1 より大きく，3 より小さい」

$$1 < 2 \ \wedge \ 2 < 3$$

「正の整数 x と負の整数 y を掛けた数 $x \cdot y$ は負の整数である」

$$(x > 0 \wedge y < 0) \ \Rightarrow \ x \cdot y < 0$$

1.3.6 括弧 (かっこ) の用法

命題の記述において，曖昧さが生じるときは，かっこを用いる．

例えば，$A \wedge B \vee C$ と書くと，$(A \wedge B) \vee C$ のことか $A \wedge (B \vee C)$ のことかわからない．

自然言語においても,「A かつ B でない」というと「(A かつ B) でない」ことなのか,「A かつ (B でない)」ことなのか曖昧である．

$A \wedge B \vee C$ にように，かっこを省略した場合にどのようにかっこを補って考えるかについては，一定の約束事をする必要がある．

標準的な論理学では,「結合力」が強い順に $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ とする．また，同じ記号同士であれば，$\wedge, \vee, \Leftrightarrow$ は左側にあるものが強く，$\Rightarrow$ は右側にあるものが強い，とする．たとえば，$A \wedge B \Rightarrow C \Rightarrow D$ は $(A \wedge B) \Rightarrow (C \Rightarrow D)$ のことである．

ただし，この約束事をきちんと習得するためには訓練を要するので，現段階では，必ずかっこをつけて書く習慣を付けるのがよい．

1.4 逆と対偶

$A \Rightarrow B$ という形の命題に対して，その「逆」と「対偶」と呼ばれる命題が存在する．

逆

命題 $B \Rightarrow A$ を $A \Rightarrow B$ の逆という．

(表:1.3.3) から分かるように，$A \Rightarrow B$ が真でも，その逆 $B \Rightarrow A$ が真であるとは限らない．

例 4 A を「 x と y は奇数」，B を「$x + y$ は偶数」とする．

- $A \Rightarrow B$ は真．
- $B \Rightarrow A$ は偽．なぜならば $x = 2, y = 4$ のとき $x + y = 6$

対偶

命題 $\neg B \Rightarrow \neg A$ を $A \Rightarrow B$ の対偶という．命題 $A \Rightarrow B$ とその対偶の真理値表は一致する．

例 5 x と y が奇数ならば，$x + y$ は偶数である．

対偶: $x + y$ が偶数でなければ，x と y が共に奇数であることはない．

1.5　必要条件と十分条件

命題 $A \Rightarrow B$ が真であるとき，命題 A は命題 B の十分条件であるという．これは，命題 B が成立することを調べるとき，命題 A が成立することが十分であることから，その名がつけられている．

また，同じ状況のとき，命題 B は命題 A の必要条件であるという．これは，命題 A が成立することを調べるとき，命題 B が成立することが必要であることから，その名がつけられている．

A が B の必要条件であるからといって十分条件とは限らないし，また，十分条件であるからといって必要条件とは限らない．

$A \Leftrightarrow B$ が真であるとき，(これは $A \Rightarrow B$ と $B \Rightarrow A$ が両方真であることと同じ) 命題 A は命題 B の必要十分条件であるという．このとき，命題 B は命題 A の必要十分条件である．

1.6　基本的な証明技法

証明を構成する場合に大事なことは，どういう推論方法を使ってよいか意識することである．

1.6.1　すべての場合をチェックする (しらみつぶし法)

組み合わせが有限個しかない場合に使える技法である．

例 **6** 命題「1, 3, 5 の中から 2 つの数を取って加えれば，どの場合も偶数になる」を証明する．

証明: すべての組み合わせである $1+1, 1+3, 1+5, 3+3, 3+5, 5+5$ がすべて偶数であることを示せばよい．

1.6.2　変数を使う

しらみつぶし法は，組み合わせが無限個あるときには使えない．そこで変数を使う方法がある．

例 **7** 命題「2 つの奇数の和は偶数である.」

証明: 任意の 2 つの奇数を $2n+1, 2m+1$ (ただし，n, m は任意の整数) とする．

$(2n+1)+(2m+1) = 2(n+m)+2 = 2(n+m+1)$ これは偶数．

1.6.3　「ならば」の鎖

$A \Rightarrow B$ の証明法として，以下のものがある．

1. A が正しい (真である) ことを前提として B が真であることを示せばよい．

2. これを直接示せないときは，中間に C をもってきて,「A が真であることを前提として C が真であること」と「C が真であることを前提として B が真であること」を両方示せばよい．

3. 同様に，中間に $C, D, \cdots$ をもってきて，間をつないでいけばよい．

4. 左から右を導く方法だけでなく，両方から攻めていく方法もある．例えば，$A \Rightarrow B$ を示すのに，

(a)　$C \Rightarrow B$ となる C を探し，

(b)　$A \Rightarrow C$ を示す．

ここで,「A が真である」「A が正しい」「A が成立する」という形の表現が出てきたが，このことを単に「A である」ということがある．たとえば,「$x = 0$ と仮定する」という．

例 8 整数 m が整数 n で割り切れることを $n \mid m$ と表す．このとき，以下が成り立つ．

(a) $n \mid m \Rightarrow n \mid a \cdot m$

(b) $n \mid m_1 \wedge n \mid m_2 \Rightarrow n \mid (m_1 + m_2)$

これらを使って,「$d \mid m \wedge d \mid n \Rightarrow d \mid (a \cdot m + b \cdot n)$」を証明する．

- A: $d \mid m \wedge d \mid n$
- B: $d \mid (a \cdot m + b \cdot n)$

A から $d \mid m$ と $d \mid n$ が導かれる．性質 (a) より,「$d \mid a \cdot m$」と「$d \mid b \cdot n$」が導かれる．しかし,「$d \mid a \cdot m \wedge d \mid b \cdot n$」はまだ求める B ではない．
性質 (b) より,「$d \mid (a \cdot m + b \cdot n)$」となり，$B$ が示せるので証明が終了する．

1.6.4 間接法

対偶による証明

$A \Rightarrow B$ を示すのに $\neg B \Rightarrow \neg A$ を示す．

例 9 「x^2 が偶数ならば x は偶数」を示したい．
対偶: 「x が奇数ならば x^2 が奇数」を示す．
$x = 2k + 1$ とすると $x^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ となり，奇数であることがわかる．

背理法

命題 A を証明するのに，$\neg A$ から矛盾 (contradiction) を導く方法である．ただし，矛盾とはある命題 B に対して $B \wedge \neg B$ のことである [2]．

例 10 命題 A: 「素数は無限個ある」を証明したい．
$\neg A$ を仮定する．すると，素数は有限個なので最大の素数 p が存在する．
m を 1 から p までのすべての整数の積とする．$m = 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot p$
$m + 1$ を考えると $m + 1 > p$ なので $m + 1$ は素数でない．また $m + 1 > 1$ なので，$m + 1$ はある素数 q で割り切れる．すなわち，

$$q \mid m + 1 \tag{1.1}$$

一方， $1 \leq q \leq p$ であるので，

$$q \mid m \tag{1.2}$$

(1.1)，(1.2) と $\mid$ に関する性質より，

$$q \mid 1$$

q は素数なので矛盾した．従って素数は無限個ある．

[2]「ある命題 B に対して」という部分がわかりにくいかもしれない．実は，ある命題 B に対して $B \wedge \neg B$ が導ければ，どんな命題 C に対しても $C \wedge \neg C$ が導けるので，B としてどの命題を取るかは問題ではない．

1.6.5 $A \Leftrightarrow B$ の証明

$A \Leftrightarrow B$ と $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ の真理値は一致するので，$A \Rightarrow B$ と $B \Rightarrow A$ を証明すればよい．

例 11 「x が偶数 $\Leftrightarrow x^2$が偶数」を証明する．

$\Rightarrow$ の証明: $x = 2k$ とすると，$x^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ となる．

$\Leftarrow$ の証明: 対偶の例 9 による証明のところで証明を行った．

1.6.6 避けるべき証明法

(a) 「自明である.」として終らせる．

(b) 「証明は容易である.」として終らせる．

1.7 「すべて」と「ある」

命題論理では，基本命題を P や Q といった文字で表し，その内部構造は考えなかった．しかし,「x は y より小さい」といった命題を，より精密に記述するためには，述語を導入する必要がある．述語とは，$x > y^2$ における $>$ のように，データ (自然数などの「もの」) に関する性質のことである．$>$ は，データ x とデータ y の間に成立する性質 (関係) を表している．述語とデータから命題を構成することにより，命題論理より精密な表現ができるようになり，これを述語論理という．

述語論理では，命題論理の論理記号のほかに,「すべて」と「ある」を表す論理記号を新しく導入する．

1.7.1 「すべて」

「すべて...」「任意の...」「勝手な...」を表すために全称記号 (universal quantifier) $\forall$ を使う．たとえば,

$$\forall x(\mathrm{Odd}(x) \Rightarrow \mathrm{Odd}(x^2))$$

ここで $\mathrm{Odd}(x)$ は x が奇数であることを表す．

$\forall x P(x)$ が真であるとは，すべてのデータ v に対して x を v で置き換えた $P(v)$ が真であることである．そうでない時，すなわち，$P(v)$ が偽になるような v が存在するとき $\forall x P(x)$ は偽となる．

「データ」が何であるかは，議論の対象としている理論ごとに定まる．この例では，整数について議論しているので x を任意の整数で置き換える．

$$\mathrm{Odd}(0) \Rightarrow \mathrm{Odd}(0^2)$$

$$\mathrm{Odd}(1) \Rightarrow \mathrm{Odd}(1^2)$$

$$\mathrm{Odd}(2) \Rightarrow \mathrm{Odd}(2^2)$$

例 12 「p が素数」とは,「$p > 1$ で p を割り切る数が 1 と p のみである」ということである．

$$p > 1 \wedge \forall x(x \mid p \Rightarrow x = 1 \vee x = p)$$

1.7.2 「ある」

「ある...」「... が存在する」を表すために存在記号 (existential quantifier) $\exists$ を使う．

$$\exists x(4 = x^2)$$

$\exists x P(x)$ が真であるとは，あるデータ v に対して x を v で置き換えた $P(v)$ が真であることである．そうでないとき，すなわち，$P(v)$ が真になるような v が 1 つも存在しないとき $\exists x P(x)$ は偽となる．

例 **13** $m \mid n$: 「n が m で割り切れる.」
これは,「$m \neq 0$ かつ ある整数 k が存在して，$n = m \cdot k$ となる」ことを意味するので，以下の命題と同値である．

$$m \neq 0 \land \exists k(n = m \cdot k)$$

一般に，データは無限にたくさんあるので，全称記号や存在記号に対する真理値表は書くことができない．

1.7.3 暗黙の全称記号

定理の記述においては，しばしば全称記号が省略されている．たとえば，例 8 においては，

$$n \mid m \Rightarrow n \mid a \cdot m$$

等を仮定したが，これでは，任意の n, m に対してこの命題が成立することなのか，ある n, m に対して成立するということなのかわからない．ここで仮定したのは前者であるので，厳密にいうと，以下のように書くべきである．

$$\forall n \forall m(n \mid m \Rightarrow n \mid a \cdot m)$$

数学や工学の文献における定理の記述では，しばしば，このような全称記号は省略されるので適宜補って考える必要がある．

1.7.4 進んだ例 (†)

例 **14** [有理数の稠密性]
$\mathcal{R}$ を実数の集合，$\mathcal{Q}$ を有理数の集合とするとき,「任意の 2 つの実数の間に有理数が存在する.」は以下のように表現できる．

$$\forall x \forall y(x \in \mathcal{R} \land y \in \mathcal{R} \land x < y \Rightarrow \exists z(z \in \mathcal{Q} \land x < z \land z < y))$$

例 **15** [関数の連続性] 「関数 f が x において連続である.」は以下のように表現できる．
任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ があって，任意の y について

$$|x - y| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon(\epsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta(\delta > 0 \land \forall y(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon))$$

略して書くと

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall y(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$$

「関数 f が x によらず (定義域全体で) 連続である」ことは，以下のようになる．

$$\forall x \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall y(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$$

例 16 [関数の一様連続性] 「関数 f が (定義域全体で) 一様連続である.」は以下のように表現できる.

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \forall y(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$$

単なる連続性とは全称記号の位置が異なる.

1.7.5 全称記号・存在記号を含む命題 (†)

- $\forall x \forall y P(x,y)$ と $\forall y \forall x P(x,y)$ は同値.
- $\exists x \exists y P(x,y)$ と $\exists y \exists x P(x,y)$ は同値.

  「偶数と奇数の和は奇数」

  $$\forall x \forall y(\mathrm{Even}(x) \land \mathrm{Odd}(y) \Rightarrow \mathrm{Odd}(x+y))$$

  $$\forall y \forall x(\mathrm{Even}(x) \land \mathrm{Odd}(y) \Rightarrow \mathrm{Odd}(x+y))$$

  ただし，$\mathrm{Even}(x)$ は「x は偶数である」を表す.

- $\neg\forall x P(x)$ と $\exists x \neg P(x)$ は同値.
- $\neg\exists x P(x)$ と $\forall x \neg P(x)$ は同値.

  「すべての整数が偶数とは限らない.」

  $$\neg \forall\, x\mathrm{Even}(x)$$

  「ある整数 x が存在して，x は偶数でない．」

  $$\exists x \neg \mathrm{Even}(x)$$

- $\forall x \exists y P(x,y)$ と $\exists y \forall x P(x,y)$ は同値ではない.

  「任意の整数 x より大きい整数 y が存在する.」 (真)

  $$\forall x \exists y(x < y)$$

  「ある整数 y が存在して，任意の整数 x より大きい．」(偽)

  $$\exists y \forall x(x < y)$$

- $\exists x(P(x) \land Q(x))$ と $\exists x P(x) \land \exists x Q(x)$ は同値ではない.

1.7.6　全称，存在に関する命題の証明

全称に関する証明

$\forall x P(x)$ を証明するには，(x に対して何も条件を仮定せずに) $P(x)$ を証明すればよい．

存在に関する証明

$\exists x P(x)$ を証明するためには，$P(v)$ を満たす v が存在することを示せばよい．

例 17　「80 と 88 の間に素数が存在する.」を示すためには，具体的に例を 1 つ示せばよい．たとえば，83 は素数.
「$x^2 - 3x + 2 = 0$ を満たす整数 x が存在する」具体的に例を示せばよい. $x = 1$ のとき条件を満たす.

なお，具体的な v が見つからないときでも，背理法と組み合わせることによって存在を証明することができる場合がある.

例 18　「実数上の連続関数 f に対して，$f(0) = 0$ かつ $f(1) = 1$ ならば、$f(x) = 0.5$ となる x で $0 < x < 1$ となるものが存在する」
このような x が存在しなければ矛盾することを示せばよい.

全称命題が偽であることを示す証明

$\neg\forall x P(x)$ を示すために，$\exists x \neg P(x)$ を示せばよい.
このような x を反例 (counterexample) という.
「素数は奇数である.」は偽である．なぜならば，2 は素数．しかし奇数でない.

1.7.7　さらに進んだ学習のために

本章の内容は，論理学の入口にはいるまで (まだ論理学とは言えない段階) である．参考書としては，守屋悦朗,「コンピュータサイエンスのための離散数学」，pp 25-31 をあげておく.
論理学の世界の入口から中にはいってみたい人は，同書の pp. 137-152 を参考にするとよい．ただし，この本のこの部分はいかにも技術的な内容を列挙してあり，わかりにくい.
本格的な論理学者がきちんと書いた本の中には，かえって，非常にわかりやすいものがある．ここでは戸田山和久,「論理学をつくる」，名古屋大学出版会をあげておく．この本の最初の方だけでも眺めてみると，目から鱗が落ちるであろう.
論理学をもう少し学びたい人のために、論理に関係する情報科学類の授業として，2 年生向けの「論理と形式化」などがある。