

# 『離散構造』演習問題 No.6 (海野)

出題: 2017年12月8日

期限: 2017年12月15日の授業

## 問題 1 (集合の帰納的定義)

- (a) (0を含む)自然数上のリストのうち、降順(大きい順)にならんでいるものからなる集合  $L$  を帰納的に定義しなさい。例えば  $\langle \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 5, 3, 2, 0 \rangle, \langle 3, 2, 2, 1 \rangle \in L$  だが  $\langle 2, 3 \rangle \notin L$  である。
- (b) 文字集合(アルファベット)  $\{a, b\}$  上の文字列のうち、 $n \geq m \geq 0$  をみたすある  $n, m$  について  $a$  が  $n$  個並んだ後に  $b$  が  $m$  個並んだものからなる集合  $S$  を帰納的に定義せよ。例えば  $\Lambda, aabb, aaab, a \in S$  だが  $ba, abb \notin S$  である。

## 問題 2 (関数の帰納的定義)

$S$  を文字集合(アルファベット)  $\{a, b\}$  上の文字列全体からなる集合とする。

- $\Lambda \in S$  (ここで  $\Lambda$  は 0 文字の文字列を表す。)
- $s \in S$  ならば  $a \cdot s \in S$
- $s \in S$  ならば  $b \cdot s \in S$

また、文字集合  $\{a, b, [, ]\}$  上の文字列集合  $R$  を以下のように帰納的に定める。

- $\Lambda \in R$
- $r \in R$  ならば  $a \cdot r \in R$
- $r \in R$  ならば  $b \cdot r \in R$
- $r \in R$  ならば  $[r] \in R$  (ここで  $[r]$  は文字  $[$  と文字  $]$  の間に文字列  $r$  を入れたものを表す。)

集合  $S, R$  に対して関数  $f: S \rightarrow R$  と  $g: R \times \{0, 1\} \rightarrow S$  を次のように帰納的に定める。

$$f(s) = \begin{cases} \Lambda & (\text{if } s = \Lambda) \\ a \cdot f(s') & (\text{if } s = a \cdot s') \\ b \cdot f(s') & (\text{if } s = b \cdot s') \end{cases} \quad g(r, n) = \begin{cases} \Lambda & (\text{if } r = \Lambda) \\ a \cdot g(r', n) & (\text{if } r = a \cdot r' \text{ and } n = 0) \\ b \cdot g(r', n) & (\text{if } r = a \cdot r' \text{ and } n = 1) \\ b \cdot g(r', n) & (\text{if } r = b \cdot r' \text{ and } n = 0) \\ a \cdot g(r', n) & (\text{if } r = b \cdot r' \text{ and } n = 1) \\ g(r', 1 - n) & (\text{if } r = [r']) \end{cases}$$

関数  $f, g$  に関して、以下の問に答えよ。

- (a)  $f(abab)$  の値を求めよ。
- (b)  $g(abab, 1)$  の値を求めよ。
- (c)  $g([ab[ba]], 0)$  の値を求めよ。
- (d)  $g(g(abab, 1), 1)$  の値を求めよ。
- (e) 任意の  $s \in S$  について  $g(f(s), 0) = s$  であることを証明しなさい。
- (f) 任意の  $n \in \{0, 1\}, r \in R$  について  $g(g(r, n), 1) = g(r, 1 - n)$  であることを証明しなさい。