

『離散構造』 3章 グラフの例題

例題 1 (グラフと二項関係)

二項関係は、それを図形で表現することにより、有向グラフと見なせる。すなわち、集合 A 上の二項関係 R があれば、頂点の集合を A とし、辺の集合を R とする有向グラフが考えられる。逆に、有向グラフがあれば、それに対応する二項関係を考えることができる。

例えば、講義資料 35 ページの例 76 の有向グラフは、集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 上の二項関係 R として、以下のように定義できる。

$$R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$$

集合 $V = \{x \in \mathcal{N} \mid 0 < x < 10\}$ 上の二項関係として以下のものを考えるとき、それぞれに対応する有向グラフを図示せよ。

$$R_1 = \{\langle x, y \rangle \in V \times V \mid x \leq y\}$$

$$R_2 = \{\langle x, y \rangle \in V \times V \mid (x - 5.5)(y - 5.5) < 0\}$$

$$R_3 = \{\langle x, y \rangle \in V \times V \mid (x - y) \text{ は } 3 \text{ で割り切れる}\}$$

また、それぞれのグラフのサイズ、位数、強連結成分の数を答えよ。

例題 2 (木)

- 木の頂点の個数を n とすると、辺の本数は何本あるか答えよ。
- 高さ h の完全 2 分木の頂点の個数は、何個以上何個以下であるか答えよ。ただし、高さ h の完全 2 分木とは、深さ 0 以上 $h - 1$ 以下の全ての頂点が 2 個の子を持つ木である。
- 高さ h の 3 分木 (完全 3 分木とは限らない) の頂点の個数は、何個以上何個以下であるか答えよ。
- 頂点が n 個ある木で、互いに異なるものはいくつあるか? $n = 3, 4$ に対して答えなさい。ただし、2 つの木が「異なる」とは、「グラフとして同型でない」という定義とする。[2012/02/03 指摘があったので変更]