

『離散構造』演習問題 No.4 (海野)

出題: 2017年11月10日

期限: 2017年11月17日の授業

有理数の集合 \mathcal{Q} 上の2項関係 R, S, T, U, V を以下のように定める。

$$x R y \Leftrightarrow \exists z \in \mathcal{Q}(z \geq 1 \wedge y = z \cdot x)$$

$$x S y \Leftrightarrow \exists z \in \mathcal{Q}(z > 0 \wedge y = z \cdot x)$$

$$x T y \Leftrightarrow |x - y| \leq 0.01$$

$$x U y \Leftrightarrow x R y \vee y R x$$

$$x V y \Leftrightarrow x R y \wedge y R x$$

問題 1 (関係の性質)

- (a) R が反射的、対称的、推移的、反対称的、半順序、同値関係であるか否かをそれぞれ理由をつけて答えよ。反例がある場合はそれを示すこと。
- (b) S について同様のことを答えよ。
- (c) T について同様のことを答えよ。
- (d) U について同様のことを答えよ。
- (e) V について同様のことを答えよ。

問題 2 (関係の合成)

- (a) $R \circ R = R$ であることを示せ。
- (b) $0 T^{10} x$ を満たす $x \in \mathcal{Q}$ のうち、最小のものと最大のものをそれぞれ求めよ。

問題 3 (閉包) $x W y \Leftrightarrow y = x + 1$ と定義される \mathcal{N} 上の2項関係 W について以下の問いに答えよ。

- (a) 関係 W に要素を追加して反射的な関係を作ることを考える。そのように作られる関係の中で、集合として最小のもの X (W の反射閉包という) を求めよ。
- (b) 関係 X に要素を追加して推移的な関係を作ることを考える。そのように作られる関係の中で、集合として最小のもの Y (X の推移閉包という) を求めよ。
- (c) 関係 Y が半順序関係であるか否かを理由をつけて答えよ。