『離散構造』 演習問題 No.3 (亀山)

以下の問題で、集合 $\mathcal{N}_{11}$ というのは、$\{n \in \mathcal{N} \mid 0 \leq n < 11\}$ となる集合、つまり、0 以上 11 未満の整数の集合のことである。

問 1 (像、逆像、全射、単射、合成、逆関数)

$a \in \mathcal{N}_{11}$ に対して、関数 $f_a : \mathcal{N}_{11} \to \mathcal{N}_{11}$ を，$f_a(x) = (a \cdot x + 1) \mod 11$ と定める．ただし，$\mod$ は，自然数上の割算の余りを求める演算とする。たとえば、$7 \mod 3 = 1$ である。

(a) $S = \{1, 2, 3\}$ とし、f_7 による S の像 $f_7(S)$ を計算しなさい。

(b) $S = \{1, 2, 3\}$ とし、f_7 による S の逆像 $f_7^{-1}(S)$ を計算しなさい。

(c) 関数 f_7 が全単射になるかどうか調べなさい。

(d) $f_a \circ f_b$ が恒等関数となるための a と b の条件 (必要十分条件) を求めなさい。

(e) f_a が逆関数を持つための a の条件 (必要十分条件) を求めなさい。

問 2 (関数の例)

(a) すべての自然数の集合 $\mathcal{N}$ から、すべての偶数の集合への単射を 1 つ示しなさい。

(b) $\mathcal{R}$ をすべての実数の集合とする。集合 $\{r \in \mathcal{R} \mid 0 < r < 1\}$ から集合 $\{r \in \mathcal{R} \mid 1 < r\}$ への全射を 1 つ示しなさい。

(c) 関数 $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ で、f は恒等関数ではないが、$f \circ f$ が恒等関数になるものを 1 つ示しなさい。

問 3 (関数の性質)

(a) すべての関数 $f : S \to T$ および $g : T \to U$ に対して、f と g が全射ならば、$g \circ f$ は全射であることを示しなさい。

(b) 「すべての関数 $f : S \to T$ および $g : T \to U$ に対して、$g \circ f$ が単射ならば、f は単射である」かどうか調べ、正しいなら証明し、正しくないなら反例を示しなさい。

(c) 有限集合 S, T の要素数をそれぞれ $5, 4$ とする。$f : S \to T$ となる単射と全射が、それぞれいくつあるかを計算しなさい。