『離散構造』 2章 関数 の例題の解答

例題 1 (関数と部分関数の定義)

$\mathcal{R}$ を実数の集合とする。次の対応は、$\mathcal{R}$ から $\mathcal{R}$ への関数 (写像) であるか答えよ．関数でないものは、$\mathcal{R}$ から $\mathcal{R}$ への部分関数であるか答えよ．

- $x \in \mathcal{R}$ に対して、$xy = 0$ となる y を対応付ける対応関係。

  関数でも部分関数でもない。なぜなら、$x = 0$ に対応する y が 2 個以上 (実際には、無限にたくさん) あるので。

- $x \in \mathcal{R}$ に対して、$xy = 10$ となる y を対応付ける対応関係。

  関数ではない。($x = 0$ に対応する y はないので。)

  部分関数である。なぜなら、どんな x に対しても $xy = 10$ となる y はたかだか 1 つなので ($x \neq 0$ に対応する y は、唯一であり、$x = 0$ に対応する y はない)。

- $x \in \mathcal{R}$ に対して、$(xy = 10) \vee (x = y = 0)$ となる y を対応付ける対応関係。

  関数である。($x = 0$ に対応する y は $y = 0$ のみであり、$x \neq 0$ に対応する y は $y = 1/x$ の 1 つのみなので。)

例題 2 (関数の像，逆像，合成)

$f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ および $g : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ となる関数 f と g を $f(x) = x^2 + x - 1,\ g(x) = x^3 + 1$ で定義する．また、$\mathcal{R}^+ = \{x \in \mathcal{R} \mid x \geq 0\}$ とする。

- f による $\mathcal{R}^+$ の像と、$\mathcal{R}^+$ の逆像を求めよ．

  f による $\mathcal{R}^+$ の像 $f(\mathcal{R}^+)$ を計算する。$f(x) = (x+1/2)^2 - 5/4$ なので $x \geq 0$ で f は単調増加であり、$x \geq 0$ で $f(x) \geq f(0) = -1$ である。結局、以下の通り。

  $$\begin{aligned} f(\mathcal{R}^+) &= \{y \in \mathcal{R} \mid y = f(x) \wedge x \geq 0\} \\ &= \{y \in \mathcal{R} \mid y \geq -1\} \end{aligned}$$

  f による $\mathcal{R}^+$ の逆像 $f^{-1}(\mathcal{R}^+)$ を計算する。$f(x) = 0$ の解を α,β(ただし $\alpha < \beta$) とする。$f(x) \geq 0$ となる x は、$x \leq \alpha$ または $x \geq \beta$ である。よって、

  $$\begin{aligned} f^{-1}(\mathcal{R}^+) &= \{x \in \mathcal{R} \mid f(x) \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathcal{R} \mid (x \leq \alpha) \vee (x \geq \beta)\} \end{aligned}$$

  ただし、$\alpha = (-1 - \sqrt{5})/2,\ \beta = (-1 + \sqrt{5})/2$ である。

- g による $\mathcal{R}^+$ の像と、$\mathcal{R}^+$ の逆像を求めよ．

  前問と同様に計算すればよい。g は全域で単調増加であることに注意せよ。

  像: $g(\mathcal{R}^+) = \{y \in \mathcal{R} \mid y \geq 1\}$ である。

  逆像: $g^{-1}(\mathcal{R}^+) = \{x \in \mathcal{R} \mid x \geq -1\}$ である。

- 合成関数 $f \circ g$ と $g \circ f$ を求めよ．

  合成の順番さえ間違えなければ問題ない。

  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x^3 + 1)^2 + (x^3 + 1) - 1 = x^6 + 3x^3 + 1.$

  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^2 + x - 1)^3 + 1 = x^6 + 3x^5 - 5x^3 + 3x$

例題 3 (全射、単射、逆関数、合成)

集合 $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ に対して、関数 $f : A \to A$ を $f(x) = (x+3)$ `mod` 7 で定義し、関数 $g : A \to A$ を $g(x) = (x * 3)$ `mod` 7 で定義する。ただし、`mod` は、整数同士の割り算による余りとする。(C 言語の % 演算子)。

- 関数 f は全射か、また、単射か。

  f は、$0, 1, \cdots, 6$ を $3, 4, 5, 6, 0, 1, 2$ に写すので、全射かつ単射である。

- 関数 g は全射か、また、単射か。

  g は、$0, 1, \cdots, 6$ を $0, 3, 6, 2, 5, 1, 4$ に写すので、全射かつ単射である。

- 関数 f と g の逆関数は存在するか、また、存在する場合、それはどういう関数か？

  両方とも全単射なので、逆関数が存在する。

  「どういう関数か」という質問には、「f の逆関数」、「g の逆関数」といえばよい (それぞれ一意的に定まるので、それ以上の説明はいらない) のであるが、もうすこしわかりやすく書くと、

  f^{-1} は、$0, 1, \cdots, 6$ を $4, 5, 6, 0, 1, 2, 3$ に写す関数である。あるいは、$f^{-1}(x) = (x - 3)$ `mod` 7 あるいは、$f^{-1}(x) = (x + 4)$ `mod` 7 である。

  g^{-1} は、$0, 1, \cdots, 6$ を $0, 5, 3, 1, 6, 4, 2$ に写す関数である。あるいは、$g^{-1}(x) = (x * 5)$ `mod` 7 である。

- 関数 f と g の 2 通りの合成 $f \circ g$ と $g \circ f$ を求めよ。

  $(f \circ g)$ は $0, 1, \cdots, 6$ を $3, 6, 2, 5, 1, 4, 0$ に写す関数である。あるいは、$(f \circ g)(x) = (x * 3 + 3)$ `mod` 7 である。

  $(g \circ f)$ は $0, 1, \cdots, 6$ を $2, 5, 1, 4, 0, 3, 6$ に写す関数である。あるいは、$(g \circ f)(x) = ((x + 3) * 3)$ `mod` 7 あるいは、$(g \circ f)(x) = (3x + 2)$ `mod` 7 である。

例題 4 (関数に関する証明)

$f : A \to B$ と $g : B \to C$ がいずれも単射であるとき、$g \circ f$ も単射であることを示せ。

$g \circ f$ が単射であるとは、「すべての $x, y \in A$ に対して、$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ ならば $x = y$」ということである。

そこで、$x, y \in A$ に対して、$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ であると仮定する。合成関数の定義から、$g(f(x)) = g(f(y))$ である。g は単射なので、この事から、$f(x) = f(y)$ が言える。また、f は単射なので、この事から、$x = y$ が言える。結局のところ、$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ を仮定して、$x = y$ が言えたので、$g \circ f$ は単射である。(証明終わり)