

『離散構造』 Short Quiz 略解

2017年11月10日(海野)

問題 1 自然数の集合 \mathcal{N} 上の 2 項関係 $xRy \Leftrightarrow \exists n \in \mathcal{N}(n \geq 1 \wedge y = n \cdot x)$ が反射的、対称的、推移的、反対称的であるか否かそれぞれ理由をつけて答えよ。ただし、 \mathcal{N} は 0 を含むものとする。

答. $\exists n \in \mathcal{N}(n \geq 1 \wedge x = n \cdot x)$ がすべての $x \in \mathcal{N}$ について成り立つので反射的である。1 R 2 だが 2 R 1 でないので対称的でない。 xRy かつ yRz とすると $\exists n_1, n_2 \in \mathcal{N}(n_1 \geq 1 \wedge n_2 \geq 1 \wedge z = n_1 \cdot n_2 \cdot x)$ が成り立つ。したがって、 $\exists n \in \mathcal{N}(n \geq 1 \wedge z = n \cdot x)$ なので推移的である。 xRy かつ yRx とすると $\exists n_1, n_2 \in \mathcal{N}(n_1 \geq 1 \wedge n_2 \geq 1 \wedge y = n_1 \cdot x \wedge x = n_2 \cdot y)$ が成り立つ。このとき $x = y$ であるので R は反対称的である。

問題 2 集合 $A = \{\text{納豆, 餃子, うなぎ}\}$, $B = \{\text{土浦, 宇都宮, 水戸, 浜松, 筑波}\}$, $C = \{\text{茨城, 栃木, 静岡}\}$ について、 A, B 上の 2 項関係 $R \subset A \times B$ と B, C 上の 2 項関係 $S \subset B \times C$ を以下のように定める。

$$R = \{\langle \text{納豆, 水戸} \rangle, \langle \text{うなぎ, 浜松} \rangle, \langle \text{餃子, 宇都宮} \rangle, \langle \text{餃子, 浜松} \rangle\}$$

$$S = \{\langle \text{宇都宮, 栃木} \rangle, \langle \text{土浦, 茨城} \rangle, \langle \text{浜松, 静岡} \rangle, \langle \text{筑波, 茨城} \rangle\}$$

関係 $R \circ S \subset A \times C$ を求めよ。

答. $R \circ S = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z(x R z \wedge z S y)\} = \{\langle \text{うなぎ, 静岡} \rangle, \langle \text{餃子, 栃木} \rangle, \langle \text{餃子, 静岡} \rangle\}$