『離散構造』 演習問題 No.2 解答例 (亀山)

問題 1 (論理の続き; 演習問題 1 の最後の問題と同じ)

(a) 命題 $\neg(P \wedge (Q \Rightarrow R))$ をそれと同値な論理積標準形の命題に変形しなさい。

ただし，論理積標準形の論理式とは，(インフォーマルに述べれば) $\wedge$ の外に $\neg$ も $\vee$ もなく，$\vee$ の外に $\neg$ がない論理式である．(逆にいえば，一番外に $\wedge$ が，次に $\vee$ が，一番内側に $\neg$ がある論理式である．)

手順の復習 1. $\Rightarrow$ や $\Leftrightarrow$ を除去する．2. $\neg$ を一番内側に移動する．3. $\vee$ を $\wedge$ の内側に移動する．

解答例. まず，$\Rightarrow$ を除去すると (同値変形で) $\neg(P \wedge ((\neg Q) \vee R))$ となる．

次に，$\neg$ を内側に移動するために，$\neg(X \wedge Y) \Leftrightarrow ((\neg X) \vee (\neg Y))$ を用いて，$\neg(P \wedge ((\neg Q) \vee R))$ を同値変形して，$(\neg P) \vee (\neg((\neg Q) \vee R))$ を得る．

次に，$\neg(X \vee Y) \Leftrightarrow ((\neg X) \wedge (\neg Y))$ を用いて，$(\neg P) \vee (\neg((\neg Q) \vee R))$ を同値変形して，$(\neg P) \vee ((\neg(\neg Q)) \wedge (\neg R))$ を得る．

さらに，$\neg(\neg X) \Leftrightarrow X$ を用いて，$(\neg P) \vee ((\neg(\neg Q)) \wedge (\neg R))$ を同値変形して，$(\neg P) \vee (Q \wedge (\neg R))$ を得る．

これで $\neg$ は一番内側まではいったので，次に $\wedge$ を $\vee$ の外にもっていく．$(X \vee (Y \wedge Z)) \Leftrightarrow ((X \vee Y) \wedge (X \vee Z))$ を用いて，$(\neg P) \vee (Q \wedge (\neg R))$ を同値変形して，$((\neg P) \vee Q) \wedge ((\neg P) \vee (\neg R))$ を得る．

これにより，$\wedge$ が一番外で，次に $\vee$ がきて，一番内側に $\neg$ が来るという構造になり，論理積標準形となった．(なお，同値変形の順番によっては，この他の形になることもあり，それでも正解である．)

(b) 命題 $(P \wedge Q) \vee (R \wedge S)$ をそれと同値な論理積標準形の命題に変形しなさい。

解答例. この命題は $\Rightarrow$ や $\neg$ を含まないので，それらに対する変形は必要ない．

$\wedge$ を $\vee$ の外にもっていこう．$(X \vee (Y \wedge Z)) \Leftrightarrow ((X \vee Y) \wedge (X \vee Z))$ を用いて，$(P \wedge Q) \vee (R \wedge S)$ を同値変形して，$((P \wedge Q) \vee R) \wedge ((P \wedge Q) \vee S)$ を得る．

これはまだ，$\wedge$ が $\vee$ の内側にあるので，さらに変形する．先ほどと左右を逆にして，$((X \wedge Y) \vee Z) \Leftrightarrow ((X \vee Z) \wedge (Y \vee Z))$ を用いて，$((P \wedge Q) \vee R) \wedge ((P \wedge Q) \vee S)$ を同値変形して，$((P \vee R) \wedge (Q \vee R)) \wedge ((P \vee S) \wedge (Q \vee S))$ を得る．

これで，$\wedge$ が $\vee$ の外に出たので，論理積標準形となる．

問題 2 (集合の記述)

以下の集合を $\{x \in S \mid A\}$ の形 (S は集合，A は x に関する論理式) で記述せよ．ただし、「x が素数である」ことを意味する論理式を Prime(x) とする。

(a) 2 つの素数ではさまれた自然数すべてからなる集合．($x - 1$ と $x + 1$ がともに素数であるような数 x からなる集合。たとえば、4 は 素数 3 と 5 ではさまれているから、この集合の要素となる。)

解答例. 求める集合は，自然数の集合の部分集合なので，$\{x \in \mathcal{N} \mid A\}$ の形で書ける．

ここで，論理式 A は,「$x-1$ と $x+1$ がともに素数」という条件に対応するが $Prime(x-1) \wedge Prime(x+1)$ とあらわせる．

まとめると，求める集合は $\{x \in \mathcal{N} \mid Prime(x-1) \wedge Prime(x+1)\}$ と表すことができる．

(b) 素数 1 つだけからなる整数の集合からなる集合 (ヒント： 1 つ 1 つの要素は、たとえば $\{3\}$ や $\{5\}$ のように素数 1 つだけからなる集合であり、そのような集合を全部あつめてできた集合を作りたい。)

解答例. 求める集合を $\{x \in S \mid A\}$ の形で書くとする．

まず集合 S について考えよう．求める集合は，集合の集合であるので，S は $\mathcal{N}$(自然数の集合) ではない ($\mathcal{N}$ の部分集合は，自然数を要素として持つが，集合は要素として持たない．) 求める集合は，自然数のある種の集合を要素として持つ集合なので，$2^{\mathcal{N}}$ の要素になる．つまり，$S = 2^{\mathcal{N}}$ である．(S の要素は，自然数の集合たちであることに注意せよ．)

次に論理式 A について考えよう．x を求める集合の要素とすると，それが「素数 1 つだけからなる集合」であるので，その条件を論理式と書けばよい．これは「ある素数 y に対して $x = \{y\}$ である」と書けばよい．つまり，述語論理の論理式として，$\exists y.\ (Prime(y) \wedge x = \{y\})$ となる．

結局，求める集合は $\{x \in 2^{\mathcal{N}} \mid \exists y.\ (Prime(y) \wedge x = \{y\})\}$ となる．

補足. 数学における集合の表記では，$\{x \in S \mid \exists y.\ A\}$ のかわりに，($\exists y.$ を省略して) $\{x \in S \mid A\}$ と書くことがある．つまり，論理式 A が含む変数のうち x 以外のものは，$\exists$ で修飾されるという暗黙の合意をしていることが多い．この表記に従えば，この問題の解答は，$\{x \in 2^{\mathcal{N}} \mid Prime(y) \wedge x = \{y\}\}$ でもよいことになる．

今年の「離散構造」の授業では，この表記は説明しなかったが，一般的な数学の表記であるので，この表記を用いて解答してもよいことにする．

問題 3 (集合の演算)

以下の集合の組はいつでも同じ集合になるか，必ずしも一致しないか，判定せよ．(一致する場合は証明し、一致しない場合は反例をあげなさい。)

(a) 集合 $(S \cup T) \cap V$ と集合 $(S \cap V) \cup T$.

解答例. 必ずしも一致しないので反例をあげる．$S = V = \{\}, T = \{3\}$ のとき，左辺は空集合で，右辺は $\{3\}$ となるので一致しない.

(b) 集合 $(S - T) \cup V$ と集合 $(S \cup V) - T$.

解答例. 必ずしも一致しないので反例をあげる．$S = T = V = \{3\}$ のとき，左辺は $\{3\}$ で右辺は空集合となるので一致しない.

(c) 集合 $2^{S \cup T}$ と集合 $2^S \cup 2^T$.

解答例. 必ずしも一致しないので反例をあげる．$S = \{2\}, T = \{3\}$ のとき，$2^{S \cup T} = \{\{\}, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$ である．一方，$2^S = \{\{\}, \{2\}\}$ および $2^T = \{\{\}, \{3\}\}$ なので，$2^S \cup 2^T = \{\{\}, \{2\}, \{3\}\}$ となるので，$2^{S \cup T}$ と一致しない.

問題 4 (有限集合の要素数)

有限集合 S の要素数を $\#S$ と表すことにする．$\#(S \cup T) = \#S + \#T - \#(S \cap T)$ と $\#(S - T) = \#S - \#(S \cap T)$ は既知として以下の問に答えなさい.

- 「1 から 1000 までの整数で，11 の倍数であって，91 と互いに素 (最大公約数が 1) であるもの」の個数.

解答例. 「91 と互いに素」という条件は「7 でも 13 でも割り切れない数」という条件と同じである．1 から 1000 までの整数で，11 の倍数の集合を S_{11}, 7 の倍数の集合を S_7, 13 の倍数の集合を S_{13} と書くことにすると求めるのは，$\#((S_{11} - S_7) - S_{13})$ である.

与えられた式を使って $\#((S_{11} - S_7) - S_{13})$ を変形すると，

$$
\begin{aligned}
\#((S_{11}-S_7)-S_{13}) &= \#(S_{11}-S_7) - \#((S_{11}-S_7)\cap S_{13})) \\
&= \#S_{11} - \#(S_{11}\cap S_7) - \#((S_{11}\cap S_{13}) - (S_7\cap S_{13})) \\
&= \#S_{11} - \#(S_{11}\cap S_7) - \#(S_{11}\cap S_{13}) + \#(S_{11}\cap S_{13}\cap S_7\cap S_{13}) \\
&= \#S_{11} - \#(S_{11}\cap S_7) - \#(S_{11}\cap S_{13}) + \#(S_{11}\cap S_{13}\cap S_7\cap S_{13}) \\
&= \#S_{11} - \#(S_{11}\cap S_7) - \#(S_{11}\cap S_{13}) + \#(S_{11}\cap S_{13}\cap S_7)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，上記の変形の途中で，以下の集合の性質を用いた．

$$(X-Y)\cap Z = (X\cap Z) - (Y\cap Z)$$

これは，本来は，厳密に証明すべき式であるがここでは使ってよいものとする．

さて，個別の集合の要素数をカウントする．$\#S_{11} = 10000/11 = 909$，$\#(S_{11}\cap S_7) = 10000/(7*11) = 129$，$\#(S_{11}\cap S_{13}) = 10000/(11*13) = 69$，$\#(S_{11}\cap S_{13}\cap S_7) = 10000/(7*11*13) = 9$ (いずれの割り算でも，余りは切り捨てて計算する) であるので，求める集合の要素数は，$909-129-69+9=720$ である．

答え: 720